

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

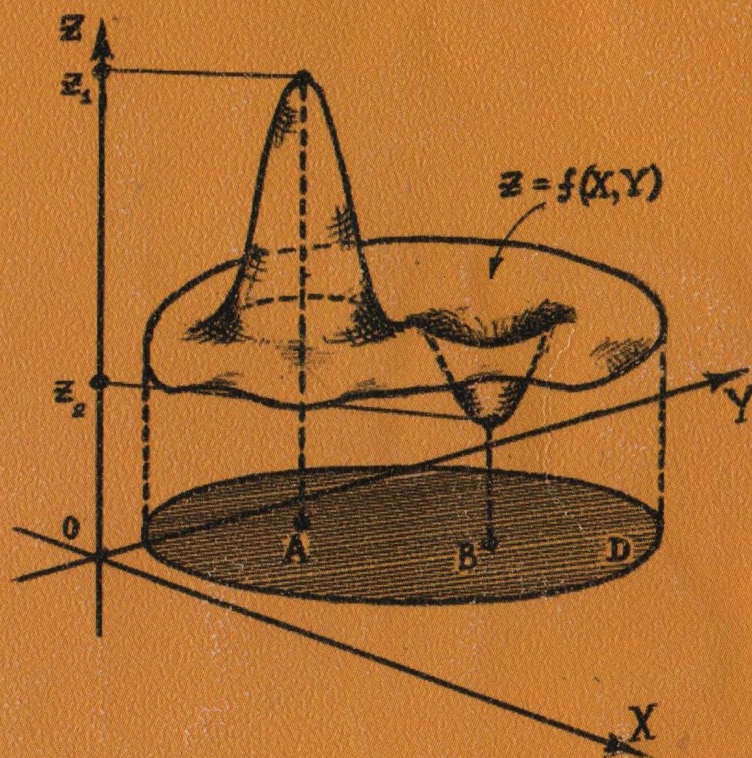
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

=====

И.В. Садовничая, Т.Н. Фоменко

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ: ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ

Учебное пособие
для студентов 1 курса университетов



МОСКВА – 2008

СОДЕРЖАНИЕ.

Предисловие	Стр. 4
Часть первая – Теория.....	8
§1. Пространство R^n	8
§2. Предел функции многих переменных.....	16
§3. Непрерывность функции многих переменных.....	24
§4. Дифференцирование функции многих переменных....	32
4.1. Частные производные.....	32
4.2. Геометрический смысл дифференцируемости функции двух переменных. Касательная плос- кость к поверхности.....	36
4.3. Дифференцируемость сложной функции.....	40
4.4. Инвариантность формы записи первого Дифференциала.....	42
§5. Производная по направлению. Градиент функции. частные производные высших порядков.....	44
5.1. Градиент и производная по направлению.....	44
5.2. Частные производные высших порядков.....	47
§6. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.	56
6.1 Дифференциалы высших порядков.....	56
6.2 Формула Тейлора.....	58
§7. Локальный экстремум функции многих переменных...	69
7.1. Необходимые и достаточные условия существования локального экстремума.....	69
7.2. Случай функции двух переменных.....	74
§8. Неявная функция.....	78
8.1. Условия существования неявной функции.....	80
8.2. Вычисление частных производных второго порядка от неявных функций.....	86
§9. Система неявных функций, определяемых системой функциональных уравнений.....	89
9.1 Условия существования системы неявных Функций.....	89

9.2 Вычисление частных производных системы неявных функций.....	97
§10. Зависимость и независимость функций.....	99
10.1 Достаточные условия независимости функций...	100
10.2 Функциональные матрицы и их приложения.....	102
§11. Условный локальный экстремум.....	109
11.1. Необходимые условия существования условного экстремума.....	111
11.2. Метод неопределённых множителей Лагранжа.....	114
Часть вторая - Задачи.....	122
Задачи к §1.....	122
Задачи к §2.....	125
Задачи к §3.....	129
Задачи к §4.....	138
Задачи к §5.....	147
Задачи к §6.....	155
Задачи к §7.....	160
Задачи к §8.....	165
Задачи к §9.....	174
Задачи к §10.....	180
Задачи к §11	190
Список литературы.....	202
Содержание.....	203

Sadovnichaya I.V., Fomenko T.N.

Mathematical analysis.

Functions of many variables:

Theory and problems.

Textbook for 1-st year university students

Annotation

This edition is devoted to theoretical and practical aspects of the topic "Functions of many variables", being studied during the second semester in the "Mathematical analysis" course. The edition is based on the authors' experience of lecturing and giving practical training at the Computational Mathematics and Cybernetics faculty of the Lomonosov Moscow State University.

The book consists of two parts. The first one is comprised of 11 chapters and contains a short, comprehensible and complete exposition of the theoretical material of each and every indicated topic. The second part contains a number of practical exercises for each chapter of the first part. Some of the exercises are given with detailed solutions while some others are recommended for the students' self-work.

The textbook contains sections devoted to the concepts of Euclidean n -dimensional space and sets and sequences in it, limits and continuity of functions of n variables, the concept of differentiability and properties of differentiable functions, including Taylor's formula, concepts of absolute and conditional local extremes of functions of n variables, dependence and independence of a set of functions, and also the concepts of an implicit function and a system of implicit functions. For a better perception of the material, 5 illustrations have been included in the text of the first part of the book.

The book is aimed to help students in studying the theory and in obtaining practical experience of solving problems on "Functions of many variables".

Intended for university undergraduates. The edition can also be useful for teachers delivering lectures and giving practical training in mathematical analysis, and for everyone who wishes to study this subject independently or more deeply.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Уважаемые читатели! Наше учебное пособие содержит материал по теме «Функции многих переменных» в объёме программы по математическому анализу для студентов первого курса факультета ВМК (как специалистов, так и бакалавров). Пособие состоит из двух частей. В первой части излагается теоретический материал, а во второй части содержится набор задач по всем затронутым вопросам.

Первая часть пособия содержит 11 параграфов, в которых освещены все теоретические разделы данной темы.

Мы рассматриваем пространство R^n , описываем его основные свойства, множества и последовательности в нём, критерий сходимости и основные свойства сходящихся последовательностей. Затем обсуждается понятие предела (предельного значения) функции n переменных, критерий существования предела и основные свойства функций, имеющих пределы. Понятие предела функции подводит читателя к рассмотрению понятия непрерывности функции n переменных. Здесь мы рассматриваем различные определения непрерывности функции в точке, основные свойства функций, непрерывных в точке и на множестве, а также понятие равномерной непрерывности функции на множестве.

Следующий раздел посвящен дифференцируемости функции многих переменных, где излагаются понятия частных производных, дифференцируемости функции в точке, необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции. Геометрический смысл дифференцируемости функции двух переменных мы поясняем в терминах связи этого понятия с существованием касательной плоскости к графику функции. Рассматривается понятие дифференциала функции и его основные свойства. Затем мы переходим

к обобщению понятия частных производных и рассматриваем производную функции по направлению. В связи с этим изучается понятие градиента функции и его основные свойства. Далее излагаются частные производные высших порядков и их свойства. Затем мы вводим понятие n -кратной дифференцируемости функции n переменных, приводим необходимые и достаточные условия равенства смешанных частных производных, правила вычисления этих величин. После этого вводится понятие кратного дифференциала функции многих переменных и рассматривается разложение её по формуле Тейлора с остаточным членом в различных формах (в форме Лагранжа, в интегральной форме, в форме Пеано).

Следующий важный раздел связан с понятием локального экстремума функции многих переменных. Здесь мы рассматриваем определение локального экстремума, необходимые и достаточные условия существования и алгоритм отыскания точек локального экстремума функции. Отдельно рассматривается случай функции двух переменных.

Далее мы переходим к изучению понятия неявной функции. Обсуждается понятие неявной функции, достаточные условия её существования и единственности, непрерывности и дифференцируемости, а также правила вычисления частных производных неявной функции первого и второго порядков. Аналогичным образом рассматривается вопрос о системе неявных функций, определяемых системой функциональных уравнений. Мы вводим понятие системы неявных функций, определяемой системой функциональных уравнений, рассматриваем достаточные условия её существования, единственности и дифференцируемости, правила вычисления частных производных системы неявных функций.

Затем мы излагаем понятие (гладкой) зависимости и независимости функций, рассматриваем достаточные условия независимости системы функций в терминах опреде-

лителей и миноров соответствующих функциональных матриц.

Последний раздел посвящён понятию условного локального экстремума функции многих переменных, где мы рассматриваем понятие условного локального экстремума, приводим необходимые и достаточные условия его существования и правила отыскания, в том числе методом неопределённых множителей Лагранжа.

В конце каждого параграфа мы формулируем несколько вопросов и упражнений для контроля усвоения материала параграфа. Изложение снабжено примерами, облегчающими понимание рассматриваемых понятий и теорем.

Мы включили в текст первой части 5 иллюстраций, чтобы облегчить таким образом восприятие наиболее важных вводимых понятий, таких, как локальный экстремум, неявная функция, условный локальный экстремум функции многих переменных.

Каждый параграф имеет свою нумерацию теорем, лемм, примеров, формул, утверждений. Ссылки на них приводятся в таком виде: «теорема 1 из параграфа 5» - и т.п.

Во *второй части* пособия мы предлагаем набор задач к каждому параграфу первой части. При этом часть задач приводится с подробными решениями, а остальные мы даём для самостоятельной работы студентов. Подбирая задачи, мы старались не повторять полностью упражнения из известного задачника Б.П.Демидовича, по которому, в основном, проводятся семинарские занятия на факультете ВМК МГУ, а давать задачи также из других источников или новые, придуманные нами. Наряду с вычислительными задачами, мы приводим довольно много задач на доказательство, полагая их решение одной из наиболее эффективных форм усвоения теоретического материала.

Все задачи снабжены ответами, а в некоторых случаях указаниями к решению.

В конце пособия мы приводим список литературы, где перечисляем учебники и задачники, которые использовались нами при составлении данного пособия, а также книги для дальнейшего знакомства с темой «Функции многих переменных». Отметим, что первая (теоретическая) часть пособия изложена, в основном, в соответствии с книгой [1]. Материалы для практических заданий во второй части взяты нами частично из [2] и [3]. Учебники [4] и [5] предлагаются для тех, кто хочет более подробно и широко ознакомиться с данной темой.

Пособие предназначено, в первую очередь, для студентов первого курса факультета ВМК МГУ, а также для первокурсников других университетов, изучающих математический анализ. Мы надеемся, что оно окажется полезным как студентам, так и преподавателям при изучении (или преподавании) данной темы.

И.В.САДОВНИЧАЯ, Т.Н.ФОМЕНКО.

§1.

ПРОСТРАНСТВО R^n .

В этом параграфе мы рассмотрим ряд понятий, которые подготовят читателя к изучению теории функций многих переменных. К ним относятся понятие пространства R^n , различные подмножества в R^n и их свойства, последовательности в R^n и условия их сходимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *n -мерным вещественным координатным пространством называется множество $R^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in R, i = 1, \dots, n\}$, элементы которого называются точками (или n -мерными векторами), а числа x_k - координатами точки (вектора) $x \in R^n$.*

Из курса линейной алгебры известно, что множество R^n с заданными в нём операциями сложения двух элементов и умножения элемента на вещественное число, определяемыми по правилам:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

$$\text{где } x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n, \lambda \in R, -$$

-является n -мерным линейным пространством, и набор элементов:

$$B = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)\}$$

является в нём (стандартным) базисом.

Линейное пространство R^n (с указанными операциями сложения и умножения на скаляры) является n -мерным евклидовым пространством относительно скалярного произведения: $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. В нем можно ввести норму элемента x : $\|x\| = (x, x) = \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2}$, - а также расстояние (метрику) между элементами x и y по следующему правилу:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Таким образом, пространство R^n может рассматриваться как *линейное нормированное пространство* размерности n , или как *метрическое пространство*.

Отметим, что скалярное произведение (а следовательно, и норма, и метрика) в R^n может вводиться и другими способами. Мы в данном пособии будем пользоваться указанными выше способами их задания.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. (шар, сфера, параллелепипед). *Открытым n -мерным шаром* радиуса R с центром в точке $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ называется множество $B_R(x_0) = \{x \in R^n \mid \rho(x, x_0) < R\}$. *Замкнутым n -мерным шаром* радиуса R с центром в точке x_0 называется множество $\overline{B}_R(x_0) = \{x \in R^n \mid \rho(x, x_0) \leq R\}$. *n -мерной сферой* радиуса R с центром в точке x_0 называется множество $S_R(x_0) = \{x \in R^n \mid \rho(x, x_0) = R\}$. Множество $\Pi_d(x_0) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n \mid |x_1 - x_{01}| < d_1, \dots, |x_n - x_{0n}| < d_n\}$, где $d_1 > 0, \dots, d_n > 0$, называется *открытым n -мерным параллелепипедом* размера $d = (d_1, \dots, d_n)$ с центром в точке x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. (Шаровой) ε -окрестностью точки $x_0 \in R^n$ называется открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке x_0 . Для обозначения ε -окрестности часто применяют специальное обозначение $U_\varepsilon(x_0)$ (или просто $U(x_0)$).

Множество $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ часто называют *проколотой ε -окрестностью* точки x_0 .

Следующие понятия внутренней, внешней, граничной точки, а также открытого и замкнутого множества в R^n полностью аналогичны соответствующим понятиям в R^2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $M \subseteq R^n$. Точка $x \in M$ называется *внутренней точкой* множества M , если существует

число $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) \subset M$. Точка $x \in R^n \setminus M$ называется *внешней* точкой множества M , если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) \subset R^n \setminus M$. Точка $x \in R^n$ называется *граничной* точкой множества M , если она не является ни внутренней, ни внешней его точкой. С совокупность всех граничных точек множества называется его *границей*. Точка x_0 называется *предельной* точкой множества $M \subset R^n$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ пересечение $x \in \overset{o}{U}_\varepsilon(x_0) \cap M$ - непусто.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Множество $M \subset R^n$ называется *открытым*, если все его точки – внутренние. Множество $M \subset R^n$ называется *замкнутым*, если множество $R^n \setminus M$ открыто.

Везде ниже (*открытой*) *окрестностью точки* мы будем называть всякое (открытое) множество, содержащее некоторую ε -окрестность этой точки.

Приведем несколько эквивалентных утверждений, каждое из которых может служить определением замкнутого множества. В дальнейшем мы сможем пользоваться тем из определений, которое нам будет удобно в данный момент.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) Множество A замкнуто (по определению 5);
- 2) множество A содержит все свои предельные точки;
- 3) множество A содержит все свои граничные точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $1) \Rightarrow 2)$. Пусть $x_0 \in R^n \setminus A$. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $U_{\varepsilon_0}(x_0) \subset R^n \setminus A$ (так как дополнение к замкнутому множеству открыто). Значит, $U_{\varepsilon_0}(x_0) \cap A = \emptyset$. Это означает, что точка x_0 не является предельной точкой множества A (поскольку в

любой окрестности предельной точки должен содержаться хотя бы один элемент множества, отличный от этой точки). Значит, A содержит все свои предельные точки.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть x_0 - граничная точка множества A . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ пересечение ε -окрестности точки x_0 с множеством A не пусто. Пусть $x_0 \notin A$. Тогда получаем, что для любого $\varepsilon > 0$: $\overset{o}{U}_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset$. Это означает, что x_0 - предельная точка A . Но по условию, множество A содержит все свои предельные точки. Мы пришли к противоречию. Значит, A содержит все свои граничные точки.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть точка $x_0 \in R^n \setminus A$. Тогда x_0 - внешняя точка множества A (так как по условию, A содержит все свои внутренние и граничные точки). Значит, существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $U_{\varepsilon_0}(x_0) \subset R^n \setminus A$ (по определению внешней точки). Это означает, что множество $R^n \setminus A$ открыто. Значит, множество A замкнуто. Утверждение 1 полностью доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Множество $A \subset R^n$ называется *ограниченным*, если существует число $R > 0$ такое, что $A \subset B_R(0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Непрерывной кривой* в R^n называется множество

$$L = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n \mid x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t)\},$$

где $t \in [\alpha, \beta]$ и все функции $\varphi_k(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Будем говорить, что точку $x_1 = (x_{11}, \dots, x_{1n})$ и точку $x_2 = (x_{21}, \dots, x_{2n})$ можно соединить непрерывной кривой, если существуют такие функции $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, непрерывные на отрезке $[\alpha, \beta]$, что

$$x_{11} = \varphi_1(\alpha), \dots, x_{1n} = \varphi_n(\alpha), \quad x_{21} = \varphi_1(\beta), \dots, x_{2n} = \varphi_n(\beta).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Множество $A \subset R^n$ называется *линейно связным*, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в A . *Областью* называется всякое открытое линейно связное множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Если каждому натуральному числу поставить в соответствие какую-либо точку пространства R^n , то полученное множество точек $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ называется *последовательностью* точек в R^n и обозначается $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ или $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$.

Говорят, что последовательность $\{x_m\}$ *сходится*, если существует точка $a \in R^n$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для любого натурального $m \geq N$ выполнено: $\rho(x_m, a) < \varepsilon$. Точка a называется *пределом* последовательности. Обозначение:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a \text{ или } x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a.$$

ЛЕММА 1. Последовательность $\{x_m\}$ *сходится к точке* $a = (a_1, \dots, a_n)$ *тогда и только тогда, когда*

$$x_{m1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a_1, \dots, x_{mn} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a_n,$$

где $x_m = (x_{m1}, \dots, x_{mn})$ (т.е. последовательность *сходится тогда и только тогда, когда она сходится по-координатно*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что для любого $m \geq N$ выполнено неравенство: $\sqrt{(x_{m1} - a_1)^2 + \dots + (x_{mn} - a_n)^2} < \varepsilon$. Тогда очевидно, что: $|x_{m1} - a_1| < \varepsilon, \dots, |x_{mn} - a_n| < \varepsilon$ для любого $m \geq N$. Значит,

$$x_{m1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a_1, \dots, x_{mn} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a_n.$$

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть сходятся координатные последовательности: $x_{m1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a_1, \dots, x_{mn} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a_n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют натуральные числа $N_k = N_k(\varepsilon)$, $k = 1, 2, \dots, n$, такие, что для любого m , $m \geq N_k$ верно: $|x_{mk} - a_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Пусть $N = \max\{N_1, \dots, N_n\}$. Тогда для любого $m \geq N$ имеем:

$$\|x_m - a\| = \sqrt{(x_{m1} - a_1)^2 + \dots + (x_{mn} - a_n)^2} < \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

Значит, $x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a$. Лемма 1 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Последовательность $\{x_m\}$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для любого натурального $m \geq N$ и для любого натурального p выполнено: $\rho(x_{m+p}, x_m) < \varepsilon$.

ЛЕММА 2. Последовательность $\{x_m\}$ является фундаментальной тогда и только тогда, когда фундаментальна каждая из координатных последовательностей $\{x_{m1}\}, \dots, \{x_{mn}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2 аналогично доказательству леммы 1. Оно предоставляется читателю в качестве упражнения.

ТЕОРЕМА 1 (критерий Коши сходимости последовательности). Последовательность $\{x_m\}$ точек пространства R^n сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность фундаментальна тогда и только тогда, когда она фундаментальна по координатно (лемма 2). Каждая из координатных после-

довательностей является обычной числовой последовательностью. Она сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна (критерий Коши сходимости числовой последовательности). Но последовательность точек R^n сходится тогда и только тогда, когда она сходится по-координатно (лемма 1). Значит, последовательность точек пространства R^n сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Последовательность $\{x_m\}$ точек пространства R^n *ограничена*, если существует число $R > 0$ такое, что $x_m \subset B_R(0)$ для любого натурального m .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Пусть $m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$ где $m_1, m_2, \dots, m_k, \dots$ - натуральные числа. Последовательность $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_k}, \dots$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_m\}$.

ТЕОРЕМА 2 (Больцано-Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности $\{x_m\}$ точек пространства R^n можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность $\{x_m\}$ ограничена, значит, существует число $R > 0$ такое, что $\sqrt{(x_{m_1})^2 + \dots + (x_{m_n})^2} < R$ для любого натурального m . Тогда очевидно, что для любого $m \geq N: |x_{m_1}| < R, \dots, |x_{m_n}| < R$, то есть числовые последовательности $\{x_{m_1}\}, \dots, \{x_{m_n}\}$ ограничены.

Выделим из последовательности $\{x_{m_1}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x_{m_{k_1}}\}$, $x_{m_{k_1}} \xrightarrow{k_1 \rightarrow \infty} a_1$ (теорема Больцано-Вейерштрасса для числовых последовательностей). Рассмотрим последовательность $\{x_{m_{k_2}}\}$. Она ограничена (как подпоследовательность ограниченной последователь-

ности), значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{m_{k_2} 2}\}$, $x_{m_{k_2} 2} \xrightarrow{k_2 \rightarrow \infty} a_2$. И так далее. В конце концов, из последовательности $\{x_{m_{k_{n-1}} n}\}$ выделим сходящуюся подпоследовательность $\{x_{m_{k_n} n}\}$, $x_{m_{k_n} n} \xrightarrow{k_n \rightarrow \infty} a_n$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{x_{m_{k_n}}\}$. Так как все её координатные последовательности сходятся: $x_{m_{k_n} 1} \xrightarrow{k_n \rightarrow \infty} a_1, \dots, x_{m_{k_n} n} \xrightarrow{k_n \rightarrow \infty} a_n$, - то и сама последовательность также сходится к точке $a = (a_1, \dots, a_n)$ (лемма 1). Теорема доказана.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §1.

1) Докажите, что следующее определение предельной точки множества эквивалентно определению 4: Точка x_0 называется предельной точкой множества $A \subset R^n$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ в ε -окрестности точки x_0 содержится бесконечно много точек множества A .

2) Является ли единичная сфера в пространстве R^n открытым множеством? Замкнутым? Приведите пример множества в R^n , которое не является ни замкнутым, ни открытым.

3) Приведите пример неограниченной последовательности точек пространства R^n из которой, тем не менее, можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

§2.

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

В данном параграфе мы рассмотрим понятие функции n переменных и обсудим важнейшее понятие предела функции и условия его существования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если каждой точке x из множества $X \subset R^n$ ставится в соответствие по определённому закону действительное число $f(x)$, то говорят что на множестве X задана *функция n переменных* $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$. Множество X называется при этом *областью определения функции $f(x)$* и обозначается D_f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (предел функции по Коши). Число $b \in R$ называется *пределом функции $f(x)$ в точке $a \in R^n$* , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой точки $x \in D_f$ такой, что $0 < \rho(x, a) < \delta$, выполнено: $|f(x) - b| < \varepsilon$. Обозначения:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1, \dots, x_n) = b.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2' (предел функции по Гейне). Число $b \in R$ называется *пределом функции $f(x)$ в точке $a \in R^n$* , если для любой последовательности аргументов $\{x_m\}$, $x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a$, $x_m \neq a$, соответствующая последовательность значений функции стремится к b : $f(x_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} b$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Определения 2 и 2' предела функции многих переменных эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

(2) $\Rightarrow$ (2'). Пусть число A является пределом функции $f(x)$ в точке a по определению 2 (по Коши). Покажем, что тогда выполнено и условие определения 2'. В самом деле, пусть

$\{x_m\}$ - произвольная последовательность, сходящаяся к точке a . Зададим любое число $\varepsilon > 0$. Тогда, согласно определению 2, существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x , $0 < \rho(x, a) < \delta$, выполняется неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$. По числу δ для последовательности $\{x_m\}$ найдётся такой номер $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$, что для всех $m, m > N$, будет $\rho(x_m, a) < \delta$, а следовательно, и $|f(x_m) - A| < \varepsilon$. Это означает, что предел $\lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m) = A$. Таким образом, условия определения предела по Гейне выполнены.

$(2') \Rightarrow (2)$. Пусть теперь выполнены условия определения $(2')$. Предположим, что определение по Коши не было бы выполнено. Это означало бы, что существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$, например, для $\delta_n = \frac{1}{n}$, имеется точка x_n , $\rho(x_n, a) < \delta_n$, но $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$. Это противоречит определению по Гейне, так как последовательность $\{x_n\}$ в этом случае сходится к точке a , но последовательность $\{f(x_n)\}$ не сходится к числу A . Утверждение 1 полностью доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что $x \rightarrow \infty$, если $\|x\| \rightarrow +\infty$. Число $b \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой точки $x \in D_f$ такой, что $\|x\| > \delta$, выполнено: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, и существуют пределы: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$. Тогда существуют пределы:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c, \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c,$$

67032555.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА
МГУ 7

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} \quad (\text{если } c \neq 0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность $\{x^m\}$ точек множества X такую, что $x^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a$, $x^m \neq a$.

Тогда $f(x^m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} b$, $g(x^m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} c$ (определение предела по Гейне). В силу свойств числовых последовательностей получаем: $(f(x^m) \pm g(x^m)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} b \pm c$,

$$(f(x^m) \cdot g(x^m)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} b \cdot c, \quad \frac{f(x^m)}{g(x^m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{b}{c} \quad (\text{если } c \neq 0).$$

Отсюда и из определения предела функции по Гейне следует утверждение теоремы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке $a \in R^n$ (или при $x \rightarrow \infty$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых двух точек $x', x'' \in D_f$, для которых $0 < \rho(x', a) < \delta$, и $0 < \rho(x'', a) < \delta$ (или $\|x'\| > \delta, \|x''\| > \delta$), выполнено неравенство: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 2 (критерий Коши существования предела функции многих переменных). Функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке $a \in R^n$ (или при $x \rightarrow \infty$) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши в точке a (или при $x \rightarrow \infty$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем проводить доказательство для случая, когда $a \in R^n$ (случай $a = \infty$ рассматривается аналогично).

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек $x', x'' \in D_f$, $0 < \rho(x', a) < \delta$, $0 < \rho(x'', a) < \delta$, выпол-

нено: $|f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ (определение предела функции по Коши). Значит,

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

то есть в точке a выполнено условие Коши.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке a . Выберем последовательность аргументов $\{x^m\}$ такую, что $x^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a$, $x^m \neq a$. Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Согласно критерию Коши, найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек $x', x'' \in D_f$, $0 < \rho(x', a) < \delta$, $0 < \rho(x'', a) < \delta$, выполнено: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Так как $x^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a$, то существует натуральный номер N такой, что $0 < \rho(x^m, a) < \delta$ для любого $m \geq N$. Тем более, $0 < \rho(x^{m+p}, a) < \delta$ для любого натурального числа p и любого $m \geq N$. Значит, $|f(x^{m+p}) - f(x^m)| < \varepsilon$.

Мы показали, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N , что для любого $m \geq N$, для любого натурального p выполнено: $|f(x^{m+p}) - f(x^m)| < \varepsilon$. Это означает в точности, что числовая последовательность $\{f(x^m)\}$ фундаментальна. Значит, она сходится (критерий Коши сходимости числовых последовательностей).

Осталось показать, что для любого выбора последовательности аргументов $\{x^m\}$ все последовательности значений функции $\{f(x^m)\}$ будут сходиться к одному и тому же числу. Пусть $x^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a$, $x^m \neq a$, $y^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a$, $y^m \neq a$; $f(x^m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} b$, $f(y^m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} c$. Рассмотрим следующую последовательность аргументов:

$$\{z^m\} = \{x^1, y^1, x^2, y^2, \dots, x^m, y^m, \dots\}.$$

Легко видеть, что $z^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a$, $z^m \neq a$. Значит, по уже доказанному нами, существует число d такое, что $f(z^m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} d$. Но последовательности $\{f(x^m)\}$ и $\{f(y^m)\}$ являются подпоследовательностями последовательности $\{f(z^m)\}$ и должны сходиться к тому же пределу. Отсюда получаем, что $b = c = d$. Теорема полностью доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* в точке $a \in R^n$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. Обозначение: $f(x) = o(1)$, $x \rightarrow a$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $(x_0, y_0) \in R^2$. Если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого числа y , $y \in \overset{o}{U}_\varepsilon(y_0)$, существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y)$ и существует $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = b$, то говорят, что существует *повторный предел* $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = b$. Аналогично можно определить *повторный предел* $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$.

Заметим, что существование повторных пределов функции в точке и существования ее предела как функции двух переменных (такой предел называют также *двойным*) не эквивалентны. Приведем соответствующие примеры.

ПРИМЕР 1. Пусть $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$

Если $y \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{0 \cdot y}{0 + y^2} = 0$, значит,

$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$. Аналогично $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$. Покажем,

что не существует $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$. Рассмотрим две последова-

тельности: $\{(x_m, y_m)\} = \left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right\}$ и $\{(x'_m, y'_m)\} = \left\{\frac{1}{m}, -\frac{1}{m}\right\}$.

Тогда $\{(x_m, y_m)\} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (0, 0)$, $\{(x'_m, y'_m)\} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (0, 0)$, но

$\{f(x_m, y_m)\} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $\{f(x'_m, y'_m)\} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, то есть для различ-

ных последовательностей аргументов, стремящихся к точке $(0, 0)$, соответствующие последовательности значений функции могут сходиться к разным числам. Это означает, что функция $f(x, y)$ не имеет предела в точке $(0, 0)$. Значит, из существования обоих повторных пределов не следует существования двойного предела.

Покажем, что и из существования двойного предела не следует существование повторных.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}.$$

Если $x^2 + y^2 \rightarrow 0$, то $f(x, y) \rightarrow 0$ (как произведение бесконечно малой функции на ограниченную). Значит, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$ по определению предела функции по Коши.

Покажем, что не существует ни один из повторных пределов (поскольку переменные входят в нашу функцию симметричным образом, то достаточно рассмотреть один из таких пределов). Пусть, например, $y \neq 0$. Тогда очевидно,

что $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = 0$, а $\lim_{x \rightarrow 0} y^2 \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ не существует.

Значит, не существует предел $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ при любом фиксированном $y \neq 0$, и тем более, не существует предел $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$.

Легко показать также, что у функции могут существовать двойной и один из повторных пределов, но не быть второго повторного предела. Для этого немного изменим функцию из примера 2:

ПРИМЕР 3. Пусть
$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}.$$

Тогда $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$, однако повторный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ не существует (проверьте это самостоятельно!)

И наконец, рассмотрим пример того, что оба повторных предела могут существовать, но не быть равными.

ПРИМЕР 4.
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

Тогда ясно, что $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1$, а $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1$

Покажите, что $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ в этом случае не существует

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §2 .

- 1) Покажите, что для функции $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ двойной предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ не существует, однако оба повторных предела существуют, причём $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = 1$, $\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = -1$.
- 2) Является ли бесконечно малой в точке (1,1) функция
- а) $f(x, y) = \frac{x-1}{y}$? б) $f(x, y) = \frac{x-1}{y-1}$?
- 1) Пусть известно, что для некоторой функции $f(x, y)$ существует двойной предел $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = b$ и один из повторных пределов $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = c$. Докажите, что в этом случае $b = c$.
-

§3.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

В данном параграфе мы обсудим понятие непрерывности функции многих переменных в точке и на множестве, а также свойства непрерывных функций.

Пусть функция $f(x)$ задана на множестве $X \subset R^n$, $a \in X$, и точка a является предельной точкой множества X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (формальное). Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке a* , если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Уточним это формальное определение в следующих двух вариантах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1' (по Коши). Функция $f(x)$ *непрерывна в точке a* , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой точки $x \in D_f$, для которой $\rho(x, a) < \delta$, выполнено: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1'' (по Гейне). Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке a* , если для любой последовательности аргументов $\{x^m\}$, $x^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a$, соответствующая последовательность значений функции сходится к $f(a)$: $f(x^m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f(a)$.

Эквивалентность определений 1, 1' и 1'' следует из эквивалентности определений предела функции по Коши и по Гейне.

Пусть множество $X \subset R^n$ таково, что любая его точка является для него предельной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $f(x)$, определенная на множестве X , называется *непрерывной на этом множестве*, если она непрерывна в каждой точке $x \in X$.

Обозначим $\Delta x_1 = x_1 - a_1, \dots, \Delta x_n = x_n - a_n$ - приращения аргументов. Тогда следующую величину:

$\Delta f(x) = f(x) - f(a) = f(a_1 + \Delta x_1, \dots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, \dots, a_n)$ - будем называть (полным) приращением функции $f(x)$ в точке a .

Отметим, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда $\lim_{x \rightarrow a} \Delta f(x) = 0$, что равносильно утверждению: $\lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \rightarrow 0}} \Delta f(x) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Обозначим через $\Delta_k f(x) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \Delta x_k, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)$ - частное приращение функции $f(x)$ в точке a , соответствующее приращению аргумента Δx_k . Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке a по переменной x_k* , если $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \Delta_k f(x) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если функция непрерывна в некоторой точке, то она, очевидно, непрерывна в этой точке по каждой из переменных. Обратное, вообще говоря, неверно. Приведем соответствующий пример.

ПРИМЕР 1. Пусть $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 1, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$. Тогда

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} - 1 \right) = 0$. Значит, функция $f(x, y)$ непрерывна по x в точке $(0, 0)$. Аналогично

доказывается непрерывность по y в точке $(0,0)$. Однако $f(x,y)$ не является непрерывной в начале координат: пусть $x_m = \frac{1}{m}$, $y_m = -\frac{1}{m}$, тогда $f(x_m, y_m) \equiv 0$. Мы получили, что последовательность $\{(x_m, y_m)\} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (0,0)$, но $\{f(x_m, y_m)\}$ не стремится при $m \rightarrow \infty$ к $f(0,0) = 1$, то есть функция $f(x,y)$ не является непрерывной в точке $(0,0)$ по совокупности аргументов (т.к. не выполняется определение Гейне).

ТЕОРЕМА 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве $X \subset R^n$. Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $a \in X$, то функции $(f(x) \pm g(x))$, $(f(x) \cdot g(x))$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(a) \neq 0$) также непрерывны в точке a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1 следует из определения непрерывности функции в точке и теоремы об арифметических операциях над функциями, имеющими предел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть функции $x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_k)$ - заданы на множестве $T \subset R^k$. Тогда любой точке $t \in T$ можно поставить в соответствие точку $x = (x_1, \dots, x_n) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in R^n$. Пусть $X \subset R^n$ - множество всех таких точек x . Если на множестве X задана функция $f(x): X \rightarrow R$, то говорят, что на множестве T задана сложная функция

$$f(x_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, \dots, t_k)) = f(x(t)): T \rightarrow R$$

ТЕОРЕМА 2 (о непрерывности сложной функции). Пусть функции $x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_k)$ непрерывны в точке $a = (a_1, \dots, a_k) \in T$, а функция $f(x_1, \dots, x_n)$ непрерывна в точке $b = (b_1, \dots, b_n)$, где $b_j = \varphi_j(a_1, \dots, a_k)$,

$j = 1, \dots, n$. Тогда сложная функция $f(x(t))$ непрерывна в точке a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность точек $\{t^m\} = \{(t_1^m, \dots, t_k^m)\}$ множества T сходится к некоторой точке $a = (a_1, \dots, a_k) \in T$. Обозначим $x_j^m = \varphi_j(t_1^m, \dots, t_k^m)$, $j = 1, \dots, n$; $\{x^m\} = \{(x_1^m, \dots, x_n^m)\}$. Так как все функции $\varphi_j(t)$ непрерывны в точке a , то последовательность $\{x^m\}$ сходится к $b = (\varphi_1(a), \dots, \varphi_n(a))$ (здесь мы пользуемся определением непрерывности функции по Гейне, а также тем фактом, что последовательность точек пространства R^n сходится тогда и только тогда, когда она сходится по координатно). Поскольку функция $f(x_1, \dots, x_n)$, в свою очередь, непрерывна в точке $b = (b_1, \dots, b_n)$, где $b_j = \varphi_j(a_1, \dots, a_k)$, то числовая последовательность $\{f(x^m)\}$ сходится к $f(b)$. Мы получили, что для любой последовательности аргументов $\{t^m\} = \{(t_1^m, \dots, t_k^m)\}$, сходящейся к точке a , соответствующая последовательность значений функции $\{f(x(t^m))\}$ сходится к $f(x(a))$. Это означает, что сложная функция $f(x(t))$ непрерывна в точке a . Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3 (о сохранении знака непрерывной функцией). Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $a \in R^n$, непрерывна в точке a и $f(a) > 0$ (< 0) то существует число $\delta > 0$ такое, что $f(x) > 0$ (< 0) для любой точки $x \in U_\delta(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(a) > 0$ (случай противоположного знака рассматривается аналогично). Обозначим $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$. Тогда $\varepsilon > 0$ и существует $\delta > 0$ такое, что

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ для любого x , $\rho(a, x) < \delta$ (определение Коши непрерывности функции в точке). Раскрывая модуль, получим: $0 < \frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3f(a)}{2}$ для любого $x \in U_\delta(a)$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть множество $X \subset R^n$ линейно связно, и функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке множества X . Если точки $a, b \in X$, а число γ лежит между числами $f(a)$ и $f(b)$, то на любой непрерывной кривой, соединяющей точки a и b и принадлежащей множеству X , найдется точка c такая, что $f(c) = \gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть кривая L задается уравнениями $x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, и все функции $\varphi_k(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем L целиком принадлежит множеству X . Тогда на отрезке $[\alpha, \beta]$ задана функция $f(x_1(t), \dots, x_n(t))$, которая является непрерывной на $[\alpha, \beta]$ по теореме о непрерывности сложной функции. Поскольку $f(x(t))$ является числовой функцией аргумента t , то (по теореме о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение) для любого числа γ , лежащего между $f(x(\alpha))$ и $f(x(\beta))$, найдется точка $\xi \in [\alpha, \beta]$ такая, что $f(x(\xi)) = \gamma$. Пусть $c \in R^n$ - точка с координатами $(\varphi_1(\xi), \dots, \varphi_n(\xi))$. Тогда $c \in L$, $f(c) = \gamma$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5 (первая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $X \subset R^n$, то она ограничена на этом множестве.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть это не так. Тогда для любого натурального числа m найдется точка $x^m \in X$ такая,

что $|f(x^m)| > m$. Последовательность $\{x^m\}$ ограничена (поскольку ограничено множество X), значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{k_m}\}$ (теорема Больцано-Вейерштрасса). Пусть $x^{k_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_0$. Так как множество X замкнуто, то оно содержит все свои предельные точки. Следовательно, $x_0 \in X$. Тогда функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , и последовательность $\{f(x^{k_m})\}$ должна сходиться при $m \rightarrow \infty$ к числу $f(x_0)$. Но последовательность $\{f(x^{k_m})\}$ - бесконечно большая (так как $|f(x^{k_m})| > k_m$ для любого m). Значит, наше предположение неверно, и функция $f(x)$ ограничена на множестве X . Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Точной верхней (нижней) гранью функции $f(x)$ на множестве $X \subset R^n$ называется действительное число M (m) такое, что

- 1) $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$) для любого $x \in X$;
- 2) для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется точка $x' \in X$ такая, что $f(x') > M - \varepsilon$ ($f(x') < m + \varepsilon$).

ТЕОРЕМА 6 (вторая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $X \subset R^n$, то она достигает на этом множестве своих точной верхней и точной нижней граней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = \sup_x f(x)$. Если для любого $x \in X$ верно неравенство: $f(x) < M$, - то функция

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

непрерывна на множестве X и $F(x) > 0$

для любого $x \in X$. Значит, согласно первой теореме Вейерштрасса, существует число $A > 0$ такое, что $F(x) \leq A$ при

всех $x \in X$. Тогда $f(x) \leq M - \frac{1}{A} < M$ для любого $x \in X$.

Мы пришли к противоречию с определением точной верхней грани. Значит, наше предположение неверно, и существует точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0) = M$. Случай точной нижней грани рассматривается аналогично. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть множество $X \subset R^n$ таково, что любая его точка является предельной. Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых двух точек $x', x'' \in X$, $\rho(x', x'') < \delta$, выполнено неравенство: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 7 (теорема Кантора). Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $X \subset R^n$, то она равномерно непрерывна на этом множестве.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(x)$ непрерывна, но не равномерно непрерывна на X . Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого натурального числа m найдутся точки $x'_m, x''_m \in X$, для которых $\rho(x'_m, x''_m) < \frac{1}{m}$, но

$$(*) \quad |f(x'_m) - f(x''_m)| \geq \varepsilon.$$

Последовательность $\{x'_m\}$ ограничена, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x'_{k_m}\}$. Пусть $x'_{k_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_0$. Так как множество X замкнуто, то $x_0 \in X$. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , значит, $f(x'_{k_m}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f(x_0)$. С другой стороны, так как

$\rho(x'_{k_m}, x''_{k_m}) < \frac{1}{k_m}$, то последовательность $\{x''_{k_m}\}$ также сходится к точке x_0 при $m \rightarrow \infty$. Значит, $f(x''_{k_m}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f(x_0)$.

Тогда получаем, что $\left| f(x'_{k_m}) - f(x''_{k_m}) \right| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Это противоречит неравенству (*). Следовательно, наше предположение неверно, и функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X . Теорема доказана.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §3.

- 1) Пусть известно, что функция $(f(x) \cdot g(x))$ непрерывна в точке $a \in R^n$. Следует ли отсюда, что функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a ? Приведите соответствующие примеры.
- 2) Если в первой теореме Вейерштрасса отказаться от условия замкнутости множества X , останется ли верным заключение теоремы? Приведите пример.
- 3) Если отказаться в теореме Кантора от условия ограниченности множества X , останется ли теорема верной? Приведите пример.

§4.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

В этом параграфе будут изложены основные понятия, связанные с дифференцированием функций многих переменных: понятие частных производных функции, важнейшее понятие дифференцируемости функции и условия дифференцируемости, а также понятие дифференциала функции и переменных и его основные свойства.

4.1. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ.

Пусть, как и выше, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, $f(x)$ — некоторая функция, и точка $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ — внутренняя для ее области определения D_f ; $\Delta x = x - x_0 = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$, где $\Delta x_k = x_k - x_{0k}$; $k = 1, 2, \dots, n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Частной производной по переменной x_k функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) &= \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = \\ &= \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_{01}, \dots, x_{0k} + \Delta x_k, \dots, x_{0n}) - f(x_{01}, \dots, x_{0k}, \dots, x_{0n})}{\Delta x_k}. \end{aligned}$$

Часто вместо $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$ применяют обозначение $f'_{x_k}(x_0)$.

Заметим, что частная производная — это обычная производная функции одной переменной, которая получается из функции $f(x)$, если зафиксировать и считать постоянными все её переменные, кроме x_k . А поскольку из дифференцируемости функции одной переменной следует её непрерывность (в данной точке), то отсюда сразу следует,

что если существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 по переменной x_k .

ПРИМЕР 1. Для функции $f(x, y, z) = x^{\frac{y}{z}}$ частные производные в точке (x, y, z) (при $x > 0, z \neq 0$) следующие:

$$f'_x = \frac{y}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}-1}, f'_y = \frac{1}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}} \cdot \ln x, f'_z = yx^{\frac{y}{z}} \left(-\frac{1}{z^2}\right) \ln x.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , если существует такая окрестность $U = U(x_0)$ точки x_0 , что для любого $x \in U(x_0)$ приращение $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ имеет вид:

$$(1) \quad \Delta f = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + \bar{o}(\rho), \quad \rho \rightarrow 0,$$

где $A_1, \dots, A_n$ - фиксированные числа, не зависящие от приращений переменных $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$, $\rho = \|\Delta x\| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}$.

Заметим, что $\bar{o}(\rho) =$

$$\frac{\bar{o}(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}{\rho} = \frac{\bar{o}(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_1}{\rho} \Delta x_1 + \dots + \frac{\bar{o}(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_n}{\rho} \Delta x_n.$$

Поскольку $\left| \frac{\Delta x_k}{\rho} \right| \leq 1$, а величина $\frac{\bar{o}(\rho)}{\rho}$ бесконечно мала при

$\rho \rightarrow 0$, то обозначив $\alpha_k = \frac{\bar{o}(\rho) \cdot \Delta x_k}{\rho^2}$, $k = 1, 2, \dots, n$, получа-

ем $\bar{o}(\rho) = \alpha_1 \cdot \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \cdot \Delta x_n$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - бесконечно малы при $\rho \rightarrow 0$.

Это позволяет получить следующее представление приращения дифференцируемой функции:

$$(2) \quad \Delta f = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n = (A, \Delta x) + (\alpha, \Delta x)$$

Здесь в скалярных произведениях участвуют n -векторы $A = (A_1, \dots, A_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$. При этом выражение $A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n = (A, \Delta x)$ есть главная, линейная относительно приращений переменных, часть приращения функции Δf .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Дифференциалом (первым дифференциалом) функции $f(x)$ в точке x_0 (соответствующим вектору Δx приращений переменных) называется главная, линейная относительно приращений переменных, часть приращения функции: $df(x_0; \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n$, где константы $A_1, \dots, A_n$ определены из равенства (1).

Что же представляют собой эти константы $A_1, \dots, A_n$? Ответ на этот вопрос мы получим из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. (Необходимое условие дифференцируемости функции). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то в этой точке существуют её частные производные f'_{x_k} по всем переменным $x_k, k = 1, \dots, n$, и верны равенства: $f'_{x_k}(x_0) = A_k, k = 1, \dots, n$, где A_k - постоянные из формулы (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмём вектор приращений $\Delta x = \Delta_k x = (0, \dots, 0, \Delta x_k, 0, \dots, 0)$, то есть переместимся от точки x_0 в некоторую точку x вдоль координатной оси x_k . Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема в x_0 , то её приращение (согласно (1)) в данном случае имеет вид: $\Delta f =$

$$= \Delta_k f = A_k \Delta x_k + \bar{o}(\rho), \quad \rho = |\Delta x_k|. \quad \text{Следовательно, } \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) =$$

$$= \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = A_k, \quad \text{что и завершает доказательство теоремы.}$$

Отметим, что теорема 1 также показывает, что константы $A_1, \dots, A_n$ в определении 2 являются однозначно определёнными.

СЛЕДСТВИЕ. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то при достаточно малом ρ приращение функции имеет вид:

$$(3) \quad \Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \cdot \Delta x_n + \bar{o}(\rho).$$

Из теоремы 1 и формулы (3) вытекает также, что для дифференцируемой функции можно определять дифференциал как главную, линейную относительно приращений переменных, часть приращения функции, задаваемую равенством:

$$(4) \quad df(x_0; \Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \cdot \Delta x_n.$$

ТЕОРЕМА 2. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя представление (3) и неравенства: $|\Delta x_k| \leq \rho$, $k = 1, \dots, n$, - получаем, что $|\Delta f| =$

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \cdot \Delta x_n + \bar{o}(\rho) \right| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot \Delta x_1 \right| + \\ &+ \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \cdot \Delta x_n \right| + |\bar{o}(\rho)| \leq \left(\sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) \right| \right) \cdot \rho + |\bar{o}(\rho)|. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что $\lim_{\rho \rightarrow 0} \Delta f = 0$. Это и означает непрерывность

функции $f(x)$ в данной точке. Теорема доказана.

4.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ К ПОВЕРХНОСТИ.

Из материала первого семестра известно, что дифференцируемость функции одной переменной равносильна существованию (в соответствующей точке) касательной к графику этой функции. Оказывается, понятие дифференцируемости функции двух переменных имеет, как мы увидим ниже, аналогичный геометрический смысл.

Пусть задана некоторая поверхность $S : F(x, y, z) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Плоскость P называется *касательной* плоскостью к поверхности $S : F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0 = M_0(x_0; y_0; z_0)$, если угол между плоскостью P и всякой секущей L , проходящей через точку M_0 и любую другую точку $M' = M'(x; y; z)$ на поверхности S , стремится к нулю при $M' \rightarrow M_0$ (M' движется по поверхности S).

Заметим, что, согласно этому определению, для любой кривой $l, l \subset S$, проходящей через точку M_0 , касательная к ней (если она существует) в точке M_0 обязательно лежит в плоскости P .

На Рис.1 изображена касательная плоскость (плоскость P) к поверхности S в точке $M_0 \in S$.

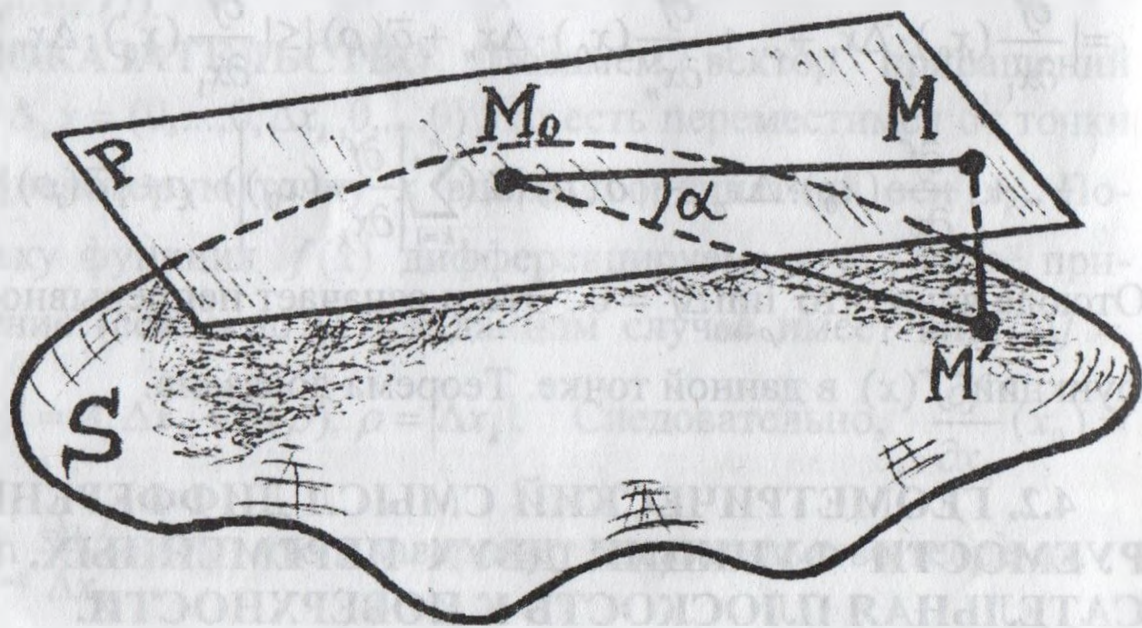


РИС.1

ЛЕММА 1. Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$, и $z_0 = f(x_0; y_0)$. Тогда у поверхности $\Gamma: f(x, y) - z = 0$ (представляющей собой график данной функции) в точке $M_0 = M_0(x_0; y_0; z_0)$ имеется касательная плоскость, задаваемая следующим уравнением:

$$(5) P = P_{M_0}^\Gamma: f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что плоскость P , задаваемая уравнением (5), удовлетворяет определению касательной плоскости. Как известно из курса аналитической геометрии, вектор $\bar{n}_P = \{f'_x(x_0; y_0); f'_y(x_0; y_0); -1\}$ является нормальным к плоскости P в точке $M_0 = M_0(x_0; y_0; z_0) \in P$. Пусть $M = M(x; y; z)$ - некоторая другая точка графика Γ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } |\cos(\overline{M_0M}, \bar{n}_P)| &= \frac{|(\overline{M_0M}, \bar{n}_P)|}{\|\overline{M_0M}\| \cdot \|\bar{n}_P\|} = \\ &= \frac{|f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0) - (z - z_0)|}{\|\overline{M_0M}\| \cdot \|\bar{n}_P\|}. \end{aligned}$$

Далее, воспользуемся тем, что в силу дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке $(x_0; y_0)$, выражение под знаком модуля в числителе последней дроби есть $\bar{o}(\rho)$. А также

$$\|\overline{M_0M}\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \geq \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \text{ Поэтому получаем:}$$

$$|\cos(\overline{M_0M}, \bar{n}_P)| = \frac{|\bar{o}(\rho)|}{\|\overline{M_0M}\| \cdot \|\bar{n}_P\|} \leq \frac{|\bar{o}(\rho)|}{\rho \cdot \|\bar{n}_P\|} \xrightarrow{M \rightarrow M_0} 0.$$

Лемма доказана.

Выясним теперь, каким условиям должна удовлетворять функция для того, чтобы она была дифференцируемой. Оказывается, что наличие частных производных у функции в данной точке не является достаточным условием для её дифференцируемости. Рассмотрим пример.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}.$$

Её обе частные производные в точке $(0;0)$ равны нулю (проверьте!), однако она не дифференцируема в этой точке

поскольку $\Delta f = f(x, y) - f(0;0) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ не имеет предела

при $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ (Убедитесь в этом самостоятельно!)

(В самом деле, это означает, что данная функция не является непрерывной в точке $(0;0)$, а следовательно, в силу Теоремы 2, она не дифференцируема в данной точке).

ТЕОРЕМА 3. (Достаточное условие дифференцируемости функции). Если функция $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет все частные производные в некоторой окрестности точки $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$, и все они непрерывны в самой точке x_0 , то $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведём рассуждения для случая $n = 2$. В общем случае доказательство проводится совершенно аналогично. Итак, пусть задана функция $f(x, y)$ удовлетворяющая условиям теоремы в точке $(x_0; y_0)$. Рассмотрим её приращение $\Delta f = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) = [f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x; y_0)] + [f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)]$. Применяя теорему Лагранжа к разностям в квадратных скобках, получаем:

$$\Delta f = f'_y(x_0 + \Delta x; y_0 + \theta_1 \Delta y) \Delta y + f'_x(x_0 + \theta_2 \Delta x; y_0) \Delta x.$$

Далее, в силу непрерывности частных производных в точке $(x_0; y_0)$, имеем следующие равенства:

$$f'_y(x_0 + \Delta x; y_0 + \theta_1 \Delta y) = f'_y(x_0; y_0) + \alpha,$$

$$f'_x(x_0 + \theta_2 \Delta x; y_0) = f'_x(x_0; y_0) + \beta,$$

где α, β стремятся к нулю при $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta f &= [f'_y(x_0; y_0) + \alpha] \Delta y + [f'_x(x_0; y_0) + \beta] \Delta x = \\ &= f'_y(x_0; y_0) \Delta y + f'_x(x_0; y_0) \Delta x + \alpha \Delta y + \beta \Delta x. \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{|\alpha \Delta y + \beta \Delta x|}{\rho} \leq \frac{|\alpha \Delta y| + |\beta \Delta x|}{\rho} \leq |\alpha| + |\beta| \rightarrow 0$ при

$\rho \rightarrow 0$, то есть $\alpha \Delta y + \beta \Delta x = \bar{o}(\rho)$, то окончательно получаем:

$$\Delta f = f'_y(x_0; y_0) \Delta y + f'_x(x_0; y_0) \Delta x + \bar{o}(\rho).$$

Это означает дифференцируемость функции $f(x, y)$ в точке $(x_0; y_0)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы рассмотрели необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции. Сделаем ещё одно простое замечание по поводу представления дифференциала. Поскольку для независимых переменных $x_k, k = 1, \dots, n$, верны равенства: $\Delta x_k = dx_k$, то дифференциал функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ от n независимых переменных в точке x можно представлять в виде:

$$(6) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \cdot dx_n.$$

4.3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ.

Пусть $F(t) = f(\varphi(t))$ сложная функция, где $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, и $x_i(t) = \varphi_i(t_1, \dots, t_k), i = 1, \dots, n$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть функции $\varphi_i(t) = \varphi_i(t_1, \dots, t_k)$, $i = 1, \dots, n$, - дифференцируемы в точке $t_0 = (t_{01}, \dots, t_{0k})$, и функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$, где $x_{0i} = \varphi_i(t_0)$, $i = 1, \dots, n$. Тогда сложная функция $F(t) = f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке $t_0 = (t_{01}, \dots, t_{0k})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим приращение:

$$(7) \quad \begin{aligned} \Delta F &= F(t) - F(t_0) = f(x(t)) - f(x(t_0)) = \\ &= f'_{x_1} \cdot \Delta x_1 + \dots + f'_{x_n} \cdot \Delta x_n + \bar{o}(\|\Delta x\|) \end{aligned}$$

В силу дифференцируемости функций $x_i = \varphi_i(t) = \varphi_i(t_1, \dots, t_k)$, $i = 1, \dots, n$, приращения Δx_i имеют вид:

$$(8) \quad \begin{aligned} \Delta x_i &= \varphi_i(t) - \varphi_i(t_0) = \\ &= (\varphi_i)'_{t_1} \cdot \Delta t_1 + \dots + (\varphi_i)'_{t_k} \cdot \Delta t_k + \bar{o}_i(\|\Delta t\|), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Подставляя выражения (8) в (7), получаем:

$$(9) \quad \begin{aligned} \Delta F &= \left(\sum_{i=1}^n f'_{x_i} \cdot (\varphi_i)'_{t_1} \right) \cdot \Delta t_1 + \dots \\ &\dots + \left(\sum_{i=1}^n f'_{x_i} \cdot (\varphi_i)'_{t_k} \right) \cdot \Delta t_k + \sum_{i=1}^n f'_{x_i} \cdot \bar{o}_i(\|\Delta t\|) + \bar{o}(\|\Delta x\|). \end{aligned}$$

Далее, поскольку в (7) $\bar{o}(\|\Delta x\|) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x_i$ (см. формулу (2)),

то с учётом (8), имеем:

$$(10) \quad \begin{aligned} \bar{o}(\|\Delta x\|) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \Delta x_i = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot (\varphi_i)'_{t_1} \right) \Delta t_1 + \dots \\ &\dots + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot (\varphi_i)'_{t_k} \right) \Delta t_k + \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \bar{o}_i(\|\Delta t\|) = \bar{o}(\|\Delta t\|) \end{aligned}$$

Последнее равенство в (10) следует из того, что $|\Delta t_j| \leq \|\Delta t\|$, $j = 1, \dots, k$, и кроме того, $\alpha_i \rightarrow 0$ при $\|\Delta t\| \rightarrow 0$.

(Действительно, из условия $\|\Delta t\| \rightarrow 0$ в силу дифференцируемости, а значит, и непрерывности, функции $x_i = \varphi_i(t)$ следует, что $\|\Delta x\| \rightarrow 0$, а следовательно, и $\alpha_i \rightarrow 0$.)

Итак, из (9) и (10), учитывая также, что $\Delta t_j = dt_j$, $j = 1, \dots, k$, получаем:

$$(11) \quad \Delta F = \left(\sum_{i=1}^n f'_{x_i} \cdot (x_i)'_{t_1} \right) \cdot dt_1 + \dots \\ \dots + \left(\sum_{i=1}^n f'_{x_i} \cdot (x_i)'_{t_k} \right) \cdot dt_k + o(\|\Delta t\|),$$

что и означает дифференцируемость данной сложной функции $F(t) = f(\varphi(t))$ в точке $t_0 = (t_{01}, \dots, t_{0k})$. (Напомним здесь ещё раз, что все частные производные вычислены в заданных точках t_0, x_0 соответственно). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ К ТЕОРЕМЕ 4.

- 1) Из формулы (11) видно, что дифференциал функции $F(t)$ имеет вид:

$$(12) \quad dF = \left(\sum_{i=1}^n f'_{x_i} \cdot (x_i)'_{t_1} \right) \cdot \Delta t_1 + \dots + \left(\sum_{i=1}^n f'_{x_i} \cdot (x_i)'_{t_k} \right) \cdot \Delta t_k,$$

а её частные производные вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial F}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^n f'_{x_i} \cdot (x_i)'_{t_j}, \quad j = 1, \dots, k.$$

- 2) В частности, если t скаляр, то $\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n f'_{x_i} \cdot (x_i)'_t$.

4.4. ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ЗАПИСИ ПЕРВОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА.

Из теоремы 4 вытекает также следующий важный факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Первый дифференциал функции многих переменных имеет инвариантную форму записи:*

$$(13) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n.$$

независимо от того, является ли эта функция простой (то есть $x_1, \dots, x_n$ - независимые переменные) или сложной (то есть $x_i(t) = \varphi_i(t_1, \dots, t_k)$, $i = 1, \dots, n$.) При этом смысл выражений dx_i различен. В первом случае, когда x_i - независимые переменные, $dx_i = \Delta x_i$ - фиксированные приращения переменных; во втором случае $dx_i = d\varphi_i(t)$ - это дифференциалы функций $x_i(t) = \varphi_i(t_1, \dots, t_k)$, $i = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перегруппировав слагаемые в формуле (12), получим: $dF = df = f'_{x_1} \cdot [\sum_{j=1}^k (x_1)_{t_j}' \cdot \Delta t_j] + \dots$

$\dots + f'_{x_n} \cdot [\sum_{j=1}^k (x_n)_{t_j}' \cdot \Delta t_j] + o(\|\Delta t\|)$, где выражения в квадратных скобках представляют собой дифференциалы функций $x_i(t) = \varphi_i(t_1, \dots, t_k)$, $i = 1, \dots, n$. Отсюда сразу следует равенство (13). Утверждение доказано.

Инвариантная форма первого дифференциала позволяет установить следующие правила его вычисления:

- 1) $d(c \cdot f) = c \cdot df$, $c \in R$;
- 2) $d(f \pm g) = df \pm dg$;
- 3) $d(f \cdot g) = d(f) \cdot g + f \cdot d(g)$;
- 4) $d(\frac{f}{g}) = \frac{d(f) \cdot g - f \cdot d(g)}{g^2}$, $g \neq 0$.

(Проверьте эти равенства самостоятельно!)

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §4.

1. Является ли функция $f(x)$ дифференцируемой в данной точке x_0 , если известно, что $f(x) = o(\|x\|)$ при $x \rightarrow x_0$?
 2. Каков геометрический смысл дифференциала функции одной переменной?
 3. Каков геометрический смысл слагаемого $\bar{o}(\rho)$ в выражении для приращения дифференцируемой функции в случае функции одной или двух переменных?
-

§5. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ ФУНКЦИИ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые обобщения понятия частных производных функции нескольких переменных. К ним относятся, с одной стороны, понятие производной функции по заданному направлению, а с другой стороны, понятие о частных производных высших порядков. Кроме того, будет рассмотрено понятие кратной дифференцируемости функции.

5.1. ГРАДИЕНТ И ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ.

Пусть $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ - фиксированная точка, внутренняя для области определения функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, и пусть задан вектор $e, e \in R^n, \|e\| = 1$. В этом случае координаты вектора e равны его направляющим косинусам: $e = (\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_n)$, где α_i - угол между осью OX_i и вектором $e, i = 1, \dots, n$. Рассмотрим функцию $\tilde{f}(t) = f(x_0 + te) = f(x_{01} + t \cos \alpha_1, \dots, x_{0n} + t \cos \alpha_n)$, где $t \in R$ - вещественный параметр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Производной функции $f(x)$ по направлению $e = (\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_n)$ в точке x_0 называется производная сложной функции $\tilde{f}(t)$ в точке $t_0 = 0$, то есть число

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial e}(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t} \\ (1) \quad &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(t) - \tilde{f}(0)}{t} = \tilde{f}'(0) \end{aligned}$$

Если функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$, то производная (1) легко вычис-

ляется по правилу дифференцирования сложной функции. Получаем формулу:

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = f'_{x_1}(x_0) \cdot \cos \alpha_1 + \dots + f'_{x_n}(x_0) \cdot \cos \alpha_n.$$

Из формулы (2) видно, что производная по направлению есть скалярное произведение вектора e и вектора частных производных функции $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Вектор $\text{grad } f(x_0) = (f'_{x_1}(x_0), \dots, \dots, f'_{x_n}(x_0))$ называется *градиентом* функции $f(x)$ в точке x_0 .

Таким образом, из (2) получается равенство:

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = (\text{grad } f(x_0), e).$$

Градиент часто представляют в виде: $\text{grad } f = \nabla f$ (читается: «набла f »), где $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ - так называемый *абстрактный вектор-оператор градиента*.

Отметим, кстати, что формулу (13) из §4 можно записать и в следующем виде: $df = (\text{grad } f, \Delta x) = (\nabla f, \Delta x)$.

Что характеризует градиент функции? Какими свойствами обладает? Выясним это подробнее.

ЛЕММА 1. *Градиент функции (в данной точке) – это вектор, направление которого есть направление наибольшей скорости роста функции, а норма градиента равна этой наибольшей скорости роста.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (3) получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = (\text{grad } f(x_0), e) = \|\text{grad } f\| \cdot \|e\| \cdot \cos(\text{grad } f, ^\wedge e).$$

Поскольку $\cos(\text{grad } f, ^\wedge e) \leq 1$, и достигает своего наибольшего значения 1, когда векторы сонаправлены, то легко

видеть, что максимальное значение производной $\frac{\partial f}{\partial e}(x_0)$ будет в том и только в том случае, когда $e = \frac{\text{grad } f(x_0)}{\|\text{grad } f(x_0)\|}$, то есть когда вектор e совпадает с ортом градиента f (в точке x_0).

Какова же максимальная скорость роста функции f ? Из формулы (3), при $e = \frac{\text{grad } f(x_0)}{\|\text{grad } f(x_0)\|}$, получаем, что:

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = (\text{grad } f(x_0), \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|}) = \|\text{grad } f\|. \text{ Лемма доказана.}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку, в силу Леммы 1, направление и норма градиента есть направление и величина максимальной скорости роста функции (в данной точке), то *градиент $\text{grad } f(x)$ не зависит от выбора системы координат.*

Рассмотрим теперь направление градиента функции по отношению к её *поверхности уровня*, то есть к геометрическому месту точек, определяемому уравнением вида: $P_c: f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = c$, где c - некоторая константа.

ЛЕММА 2. *Градиент дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x)$ ортогонален её поверхности уровня P_c , проходящей через точку x_0 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в малой окрестности точки x_0 взята произвольная точка x , $x \in P_c, x - x_0 = \Delta x \neq 0$. В силу дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0 , имеем:

$$0 = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (\text{grad } f(x_0), \Delta x) + \bar{o}(\|\Delta x\|).$$

Разделив это равенство на $\|\Delta x\|$, получим:

$$(4) \quad 0 = \frac{\Delta f}{\|\Delta x\|} = f'_{x_1}(x_0) \frac{\Delta x_1}{\|\Delta x\|} + \dots + f'_{x_n}(x_0) \frac{\Delta x_n}{\|\Delta x\|} + \frac{\bar{o}(\|\Delta x\|)}{\|\Delta x\|} = (\text{grad } f(x_0), \frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}) + \frac{\bar{o}(\|\Delta x\|)}{\|\Delta x\|}.$$

При переходе к пределу в (4) при $\|\Delta x\| \rightarrow 0$ вектор $\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}$ превращается в касательный вектор $e_{\text{кас.}}$ в точке x_0 к поверхности P_c , поэтому получается, что $(\text{grad } f(x_0), e_{\text{кас.}}) = 0$. Таким образом, $\text{grad } f(x_0) \perp e_{\text{кас.}}$. В силу произвольности точки $x \in P_c$ отсюда следует, что $\text{grad } f(x_0) \perp P_c$. Это завершает доказательство леммы.

5.2. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

Если у функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ определена в некоторой области $G \subset R^n$, то она также является функцией n переменных. Может случиться, что эта функция имеет частную производную по переменной x_i в некоторой внутренней точке $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ области G . Тогда эту производную $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) (x_0) =$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} (x_0)$ называют второй частной производной функции f сначала по переменной x_k , а затем по переменной x_i , в точке $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ (то есть сначала производится дифференцирование по x_k , а затем по x_i). Если $x_k \neq x_i$, то частная производная второго порядка называется смешан-

ной. Далее, применяя такое же рассуждение ко второй частной производной, можно определить понятие третьей частной производной, и так далее. Основываясь на этом описании понятия второй частной производной, мы можем ввести следующее общее индуктивное определение:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$

имеет частную производную $\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}}(x)$ $(n-1)$ -го поряд-

ка в некоторой области $G \subset R^n$, у которой также существует частная производная по переменной x_{i_n} в точке

$x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in G$, то эта производная: $\frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}} \right)(x_0)$

- называется *частной производной n -го порядка функции $f(x)$ по переменным $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ в точке x_0* и обозначается

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}}(x_0).$$

Аналогично частным производным первого порядка, существуют другие обозначения и для частных про-

изводных высших порядков. Производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x_0)$,

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}}(x_0) \text{ можно обозначать и так: } f''_{x_k x_i}, f^{(n)}_{x_{i_1} \dots x_{i_n}} -$$

соответственно. Если среди переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ не все совпадают, то такая частная производная n -го порядка называется *смешанной*.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} xy; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2 y^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{1+x^2 y^2};$$

Для её частных производных верно равенство (проверьте его самостоятельно!):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{1+x^2 y^2} \right) = \frac{1-x^2 y^2}{(1+x^2 y^2)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

ПРИМЕР 2. Пусть теперь задана функция

$$g(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

Вычислим её частные производные первого порядка:

$$f'_x(x; y) = \begin{cases} y \frac{4x^2 y^2 + x^4 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

$$f'_y(x; y) = \begin{cases} x \frac{-4x^2 y^2 + x^4 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

В этом случае оказывается, что смешанные частные производные второго порядка в точке (0;0) не совпадают, а именно:

$$f''_{xy}(0;0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0; y) - f'_x(0;0)}{y} = -1;$$

$$f''_{yx}(0;0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_y(x;0) - f'_y(0;0)}{x} = 1.$$

(Проверьте самостоятельно все вычисления!).

Рассмотрим теперь понятие n раз дифференцируемой функции, которое также вводится индуктивно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ называется дважды дифференцируемой в точке $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$, если она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки, и все её частные производные дифференцируемы в

точке x_0 . Аналогично, если функция $f(x)$ $(n-1)$ раз $(n > 1)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 , и все её частные производные $(n-1)$ -го порядка дифференцируемы в точке x_0 , то $f(x)$ называется n раз дифференцируемой в точке x_0 .

Из теоремы 3 параграфа 4 и только что приведённого определения 4 вытекает следующее достаточное условие для того, чтобы функция была n раз дифференцируема в данной точке.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для того, чтобы функция $f(x)$ была n раз дифференцируема в данной точке $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$, достаточно, чтобы в некоторой окрестности точки x_0 она была $n-1$ раз дифференцируема, чтобы у неё существовали все частные производные n -го порядка, и чтобы все они были непрерывны в самой точке x_0 .

Рассмотрим теперь вопрос о том, зависят ли смешанные частные производные функции $f(x)$ по одному и тому же набору переменных от того, в каком порядке производится последовательное дифференцирование, и при каких условиях они совпадают. В приведённых выше примерах, как мы видели, в одном случае (Пример 1) смешанные производные второго порядка совпадают, а в другом (Пример 2) они различны. Сформулируем и докажем 2 теоремы о достаточных условиях равенства смешанных частных производных второго порядка функции двух переменных.

ТЕОРЕМА 1. Если функция $f(x, y)$ дважды дифференцируема в точке (x_0, y_0) , то
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие теоремы означает, что частные производные функции $f(x, y)$ определены в некоторой окрестности $U = U(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) , и дифференцируемы в самой этой точке. Пусть приращение h достаточно мало, так что точка $(x_0 + h, y_0 + h)$ принадлежит окрестности U . Рассмотрим выражение $\Phi = \Phi(x_0, y_0, h) = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0)$, которое можно представить следующими двумя способами. Во-первых, так:

$$(5) \quad \begin{aligned} \Phi &= [f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0)] - \\ &\quad - [f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)] = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0), \end{aligned}$$

где $\varphi(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)$. И во-вторых, так:

$$(6) \quad \begin{aligned} \Phi &= [f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0 + h)] - \\ &\quad - [f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)] = \psi(y_0 + h) - \psi(y_0), \end{aligned}$$

где $\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$.

Применяя теорему Лагранжа к дифференцируемой функции $\varphi(x)$ на интервале $(x_0; x_0 + h)$, из (5) получаем:

$$(7) \quad \begin{aligned} \Phi &= \varphi'_x(x_0 + \theta h) \cdot h = [f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - \\ &\quad - f'_x(x_0 + \theta h, y_0)] \cdot h = [f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0, y_0)] \cdot h - \\ &\quad - [f'_x(x_0 + \theta h, y_0) - f'_x(x_0, y_0)] \cdot h, \text{ где } \theta \in (0; 1). \end{aligned}$$

Далее, в последнем выражении в квадратных скобках стоят приращения дифференцируемой в точке (x_0, y_0) функции f'_x , которые можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} [f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0, y_0)] &= f''_{xx}(x_0, y_0)\theta h + \\ &\quad + f''_{xy}(x_0, y_0)h + \alpha_1\theta h + \alpha_2h; \end{aligned}$$

$$[f'_x(x_0 + \theta h, y_0) - f'_x(x_0, y_0)] = f''_{xx}(x_0, y_0)\theta h + \alpha_3\theta h,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - бесконечно малые при $h \rightarrow 0$. Подставляя полученные выражения в (7), получаем:

$$\Phi = f''_{xx}(x_0, y_0)\theta h^2 + f''_{xy}(x_0, y_0)h^2 + (\alpha_1\theta h + \alpha_2 h)h - \\ - f''_{xx}(x_0, y_0)\theta h^2 - \alpha_3\theta h^2.$$

Таким образом,

$$(8) \quad \Phi = f''_{xy}(x_0, y_0)h^2 + (\alpha_1\theta + \alpha_2 - \alpha_3\theta)h^2.$$

Совершенно аналогично, используя представление (6), получаем:

$$\Phi = \psi'_y(y_0 + \tilde{\theta}h) \cdot h = [f'_y(x_0 + h, y_0 + \tilde{\theta}h) - \\ - f'_y(x_0, y_0 + \tilde{\theta}h)] \cdot h = \\ (9) \quad [f'_y(x_0 + h, y_0 + \tilde{\theta}h) - f'_y(x_0, y_0)] \cdot h - \\ - [f'_y(x_0, y_0 + \tilde{\theta}h) - f'_y(x_0, y_0)] \cdot h = f''_{yx}(x_0, y_0)h^2 + \\ + f''_{yy}(x_0, y_0)\tilde{\theta}h^2 + (\beta_1 h + \beta_2 \tilde{\theta}h)h - f''_{yy}(x_0, y_0)\tilde{\theta}h^2 - \beta_3 \tilde{\theta}h^2,$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ - бесконечно малые при $h \rightarrow 0$. Поэтому из (9) получаем:

$$(10) \quad \Phi = f''_{yx}(x_0, y_0)h^2 + (\beta_1 + \beta_2 \tilde{\theta} - \beta_3 \tilde{\theta})h^2.$$

Поделив на h^2 и приравнявая (8) и (10), получим:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) + (\alpha_1\theta + \alpha_2 - \alpha_3\theta) = f''_{yx}(x_0, y_0) + (\beta_1 + \beta_2 \tilde{\theta} - \beta_3 \tilde{\theta}),$$

откуда и следует искомое равенство: $f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0)$, так как разность $f''_{yx}(x_0, y_0) - f''_{xy}(x_0, y_0)$ есть бесконечно малая при $h \rightarrow 0$ и значит, равна нулю. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если у функции $f(x, y)$ в некоторой окрестности $U = U(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) существуют частные производные $f'_x, f'_y, f''_{yx}, f''_{xy}$, причём производные f''_{yx}, f''_{xy} непрерывны в точке (x_0, y_0) , то имеет место равенство: $f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем выражение Φ и некоторые выкладки из доказательства теоремы 1. Из ра-

ленства (7) и условия теоремы о существовании частной производной f''_{xy} , применяя теорему Лагранжа, получаем:

$$(11) \quad \Phi = [f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0)] \cdot h = f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 h) \cdot h^2, \text{ где } \theta_1 \in (0;1).$$

С другой стороны, используя выкладку (9) и условие теоремы о существовании производной f''_{yx} и применяя теорему Лагранжа, имеем:

$$(12) \quad \Phi = [f'_y(x_0 + h, y_0 + \tilde{\theta}h) - f'_y(x_0, y_0 + \tilde{\theta}h)] \cdot h = f''_{yx}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \tilde{\theta}h) \cdot h^2, \text{ где } \theta_2 \in (0;1).$$

Поделив на h^2 и приравнявая правые части выражений (11) и (12), приходим к равенству:

$$(13) \quad f''_{yx}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \tilde{\theta}h) = f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 h).$$

При переходе к пределу в (13) при $h \rightarrow 0$, в силу условия непрерывности этих производных в точке (x_0, y_0) , получаем искомое равенство: $f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0)$. Теорема полностью доказана.

Из теоремы 1 выведем достаточное условие равенства смешанных производных высших порядков.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $f(x)$ m раз ($m > 2$) дифференцируема в точке x_0 . Тогда её частные производные m -го порядка не зависят от порядка последовательного выполнения операций дифференцирования.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что про-

изводная $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \dots \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(x_0)$ не зависит от перестановки двух соседних операций дифференцирования, то есть

доказать равенство:

$$(14) \quad \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \dots \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(x_0) = \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \dots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_{i_1}}(x_0).$$

С этой целью рассмотрим функцию

$$F(x) = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}(x), \quad 1 < k < m. \text{ Из условия теоремы следует,}$$

что:

- 1) при $1 < k < m-1$ функция $F(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 ;
- 2) при $k = m-1$ функция $F(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0 .

Но тогда, по теореме 1, её смешанные частные производные $\frac{\partial^2 F}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}}, \frac{\partial^2 F}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k}}$ при $1 < k < m-1$ тождественно совпадают в некоторой окрестности точки x_0 , а при $k = m-1$ они совпадают в точке x_0 . Это означает, что:

- 1) $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_{i_1}}$ при $1 < k < m-1$ в некоторой окрестности точки x_0 , откуда при дальнейшем дифференцировании по остальным переменным $x_{i_{k+2}}, \dots, x_{i_m}$ получается равенство (14);

- 2) равенство: $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_{i_1}}$ в точке x_0 при

$k = m-1$ совпадает с искомым равенством (14).

Теорема доказана.

Из теоремы 3 вытекает следующее обстоятельство.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если функция $f(x)$ m раз ($m \geq 2$) дифференцируема в точке x_0 , то её частные производные m -го порядка можно записывать в следующей форме: $\frac{\partial^m f}{(\partial x_n)^{\alpha_n} \dots (\partial x_1)^{\alpha_1}}$, где $0 \leq \alpha_j \leq m$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §5.

- 1) В каком направлении данная функция быстрее всего убывает?
 - 2) Как вычислить нормаль к графику дифференцируемой функции $z = f(x, y)$.
 - 3) Если функция дифференцируема в данной точке 10 раз, то на каком множестве совпадают её смешанные частные производные а) 7-го порядка; б) 9-го порядка; в) 10-го порядка?
-

ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Как указано в заголовке, в этом параграфе будет изложено понятие кратных дифференциалов функции n переменных и выведена важная для приложений формула Тейлора, представляющая приращение функции (при малой норме вектора приращений её аргументов) в виде суммы некоторого многочлена и бесконечно малой функции (при норме вектора приращений аргументов, стремящейся к нулю).

6.1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

Ранее, в параграфе 4, мы рассматривали инвариантную форму записи (первого) дифференциала функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ (формула (13)). При этом сам оператор дифференцирования имеет, очевидно, вид:

$$d = (\nabla, dx) = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n.$$

Предположим, что после применения к функции $f(x)$ оператора дифференцирования d получается снова дифференцируемая функция $df(x)$ (в данной точке или на данном множестве). Для этого достаточно предположить, что функция $f(x)$ дважды дифференцируема (в точке или на множестве), а переменные $x_1, \dots, x_n$ либо независимы, либо тоже представляют собой дважды дифференцируемые функции (в соответствующей точке или на соответствующем множестве). Тогда к функции $df(x)$ можно снова применить оператор дифференцирования, который (в аналогично инвариантной форме записи) можно обозначить для удобства другой буквой, например, так:

$$\delta = (\nabla, \delta x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \delta x_n.$$

Композиция этих двух операторов имеет вид:

$$(1) \quad \delta(df) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) \cdot \delta x_k.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вторым дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 называется величина $d^2 f(x_0) = \delta(df)(x_0)$ - значение композиции (1), взятое при равенстве: $\delta x = \{\delta x_1, \dots, \delta x_n\} = \{dx_1, \dots, dx_n\} = dx$, где все частные производные вычислены в точке x_0 , то есть выражение:

$$d^2 f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) \cdot dx_k.$$

По индукции, если определён и дифференцируем дифференциал $d^{n-1} f(x)$, то n -ым дифференциалом (дифференциалом n -го порядка) функции $f(x)$ в точке x_0 называется величина $d^n f(x_0) = \delta(d^{n-1} f)(x_0)$ - значение композиции $\delta(d^{n-1} f)$, взятое при равенстве:

$$\delta x = \{\delta x_1, \dots, \delta x_n\} = \{dx_1, \dots, dx_n\} = dx,$$

где все частные производные вычислены в точке x_0 .

ВАЖНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть переменные $x_1, \dots, x_n$ независимы или являются линейными функциями. (Под линейной функцией n независимых переменных понимают

функцию вида $x_i(t_1, \dots, t_k) = \sum_{j=1}^k a_{ij} t_j$, где $a_{ij} \in R$). Тогда все

их дифференциалы, кроме первого, равны нулю, поскольку равны нулю все частные производные второго и более высоких порядков. В этих случаях форма записи для дифференциалов высших порядков существенно упрощается. Более конкретно, отметим что:

1) $d^2 f(x_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f''_{x_i x_j}(x_0) dx_i dx_j$ - квадратичная форма от переменных $dx_1, \dots, dx_n$. Эта квадратичная форма симметрична, если участвующие в ней частные производные не зависят от порядка последовательного дифференцирования.

2) В указанных случаях для дифференциалов высших порядков верно равенство:

$$(2) \quad d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m f = (\nabla, dx)^m f, \quad m \geq 1.$$

3) Для вычисления дифференциалов высших порядков в указанных случаях удобно пользоваться следующей формулой полинома Ньютона (которую мы здесь не доказываем):

$$(3) \quad \begin{aligned} & (a_1 + \dots + a_n)^m = \\ & = \sum_{\substack{\gamma_1 + \dots + \gamma_n = m \\ 0 \leq \gamma_i \leq m}} \frac{m!}{(\gamma_1)! \dots (\gamma_n)!} (a_1)^{\gamma_1} \dots (a_n)^{\gamma_n}, \quad m \geq 1 \end{aligned}$$

6.2. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Для функций многих переменных, аналогично случаю одной переменной, имеет место формула Тейлора. В этом разделе мы будем рассматривать функции n независимых переменных.

ТЕОРЕМА 1. (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). Пусть функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ $(m+1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности $U = U(x_0)$ точки $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$. Тогда для всякого $x, x \in U(x_0)$, приращение функции $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ представимо в виде:

Формула Тейлора.

$$(4) \quad \Delta f = f(x) - f(x_0) = df(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \dots + \frac{d^m f(x_0)}{m!} + R_m,$$

где остаточный член имеет следующий вид (называемый остаточным членом в форме Лагранжа):

$$(5) \quad R_m = \frac{d^{m+1} f(x_0 + \theta \Delta x)}{(m+1)!}, \quad \theta \in (0;1), \quad \Delta x = x - x_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сложную функцию $F(t) = f(x_0 + t\Delta x) = f(x_{01} + t\Delta x_1, \dots, x_{0n} + t\Delta x_n)$. Эта функция одной переменной, в силу условий теоремы, удовлетворяет всем требованиям для представления её по формуле Тейлора-Маклорена, рассмотренной в первом семестре, при $t_0 = 0, t = 1, \Delta t = 1$. Таким образом, можно записать:

$$(6) \quad F(1) - F(0) = F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(m)}(0)}{m!} + \frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}.$$

Заметим, что поскольку внутренние функции $x_k(t) = x_{0k} + t\Delta x_k$ являются линейными, то производные сложной функции $F(t)$ в точке $t_0 = 0$ легко вычисляются и имеют вид:

$$(7) \quad \begin{aligned} F'(0) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \Delta x_i = df(x_0), \\ F''(0) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \Delta x_i \Delta x_j = d^2 f(x_0), \end{aligned}$$

$$F^{(m)}(0) = d^m f(x_0),$$

$$F^{(m+1)}(\theta) = d^{m+1} f(x_0 + \theta \Delta x).$$

(Предлагаем проверить равенства (7) самостоятельно!)
Подставляя эти равенства в (6), получаем и искомую

формулу (4), и формулу для остаточного члена (5), что и требовалось. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. (Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме). Пусть выполнены все условия теоремы 1, и пусть, сверх того, все частные производные $(m+1)$ -го порядка функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ непрерывны в некоторой шаровой окрестности точки $x_0 = x_{01}, \dots, x_{0n}$. Тогда остаточный член R_m в формуле (4) может быть представлен в виде:

$$(8) \quad R_m = \frac{1}{m!} \int_0^1 (1-t)^m d^{m+1} f(x_0 + t\Delta x) dt = \\ = \frac{1}{m!} \int_0^1 (1-t)^m [(\nabla, \Delta x)^{m+1} f](x_0 + t\Delta x) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что в формуле (6) остаточный член можно представить в интегральной форме:

$$(9) \quad R_m = \frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!} = \frac{1}{m!} \int_0^1 F^{(m+1)}(t)(1-t)^m dt.$$

С этой целью применим к очевидному равенству:

$$F(1) = F(0) + \int_0^1 F'(t) dt \quad - \text{формулу интегрирования по частям.}$$

Поскольку $dt = d(-(1-t))$. Получим: $\Delta F = F(1) - F(0) =$

$$= \int_0^1 F'(t) dt = F'(t)[-(1-t)] \Big|_0^1 + \int_0^1 F''(t)(1-t) dt = F'(0) +$$

Формула Тейлора.

+ $\int_0^1 F''(t)(1-t)dt$. К последнему интегралу $\int_0^1 F''(t)(1-t)dt$

снова применим формулу интегрирования по частям, имея в виду равенство: $(1-t)dt = d(-\frac{1}{2}(1-t)^2)$. Тогда получим:

$$\begin{aligned}\Delta F &= F'(0) + F''(t)\left[-\frac{1}{2}(1-t)^2\right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 F'''(t)(1-t)^2 dt = \\ &= F'(0) + \frac{1}{2} F''(0) + \frac{1}{2} \int_0^1 F'''(t)(1-t)^2 dt.\end{aligned}$$

И так далее, применяя снова и снова формулу интегрирования по частям к получающемуся интегралу, в итоге придём к формуле:

$$(10) \quad \begin{aligned}\Delta F &= F'(0) + \frac{1}{2} F''(0) + \dots + \frac{F^{(m)}(0)}{m!} + \\ &+ \frac{1}{m!} \int_0^1 F^{(m+1)}(t)(1-t)^m dt,\end{aligned}$$

где остаточный член выражается как раз формулой (9).

Теперь, воспользовавшись равенствами (7), получаем из формулы (10) искомую формулу (4) с остаточным членом в виде (8). Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. В условиях только что доказанного следствия из формулы (8) легко получается формула остаточного члена в форме Лагранжа. В самом деле, достаточно применить к правой части формулы (8) первую теорему о среднем значении для определённого интеграла (учитывая, что функция $(1-t)^m$ не меняет знака на интервале $(0;1)$):

$$R_m = \frac{1}{m!} \int_0^1 F^{(m+1)}(t)(1-t)^m dt = \frac{1}{m!} F^{(m+1)}(\theta) \int_0^1 (1-t)^m dt =$$

$$= \frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!} [-(1-t)^{m+1}] \Big|_0^1 = \frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}.$$

Теперь рассмотрим разложение функции по формуле Тейлора при более слабых условиях, и ещё одну форму остаточного члена - форму Пеано.

ТЕОРЕМА 2. (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Пусть m - целое число, $m \geq 1$. Пусть функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ $m-1$ раз дифференцируема в некоторой шаровой окрестности $U = U(x_0)$ точки $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$, и m раз дифференцируема в самой точке $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$. Тогда для любой точки $x, x \in U = U(x_0)$, верна формула:

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = df(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \dots + \frac{d^m f(x_0)}{m!} + R_m,$$

где остаточный член имеет вид (называемый остаточным членом в форме Пеано):

$$(11) \quad R_m = o(\rho^m), \quad \rho \rightarrow 0, \quad \rho = \|\Delta x\|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Прежде, чем доказывать теорему 2, заметим, что формула Тейлора в более подробной записи имеет следующий вид: $f(x) =$

$$(12) \quad = f(x_0) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left[\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^k f(x) \Big|_{x=x_0} + R_m$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$, $\Delta x_k = x_k - x_{0k}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

В правой части этого равенства стоит сумма многочлена степени m от n переменных $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ и остаточного члена R_m . Выразим остаточный член R_m из равенства (12) и рассмотрим (обозначим) его как функцию: $R_m = g_m(x)$, - задаваемую следующим равенством:

$$(13) \quad g_m(x) = f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left[(x_1 - x_{01}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_n - x_{0n}) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^k f(x) \Big|_{x=x_0}.$$

Для доказательства теоремы 2 теперь достаточно установить, что при выполнении условий этой теоремы имеет место равенство: $g_m(x) = \bar{o}(\rho^m)$.

Сначала сформулируем и докажем две вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. Если функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ m раз дифференцируема в точке $x_0 = x_{01}, \dots, x_{0n}$, то как сама функция $g_m(x)$, определённая равенством (13), так и все ее частные производные по любым переменным $x_1, \dots, x_n$ до порядка m включительно обращаются в нуль в точке x_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. При $m=1$ функция $g_1(x)$ принимает вид:

$$g_1(x) = f(x) - f(x_0) - (x_1 - x_{01}) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) - \dots - (x_n - x_{0n}) \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0),$$

и равенства: $g_1(x_0) = 0$, $\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x_0) = 0$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$ -

проверяются элементарно.

Для проведения индукции предположим, что лемма справедлива для некоторого номера $m \geq 1$, и докажем, что в таком случае она справедлива и для номера $m+1$.

Пусть функция $f(x)$ $m+1$ раз дифференцируема в точке $x_0 = x_{01}, \dots, x_{0n}$, и рассмотрим функцию:

$$(14) \quad g_{m+1}(x) = f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k!} \left[(x_1 - x_{01}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_n - x_{0n}) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^k f(x) \Big|_{x=x_0}.$$

Легко видеть, что $g_{m+1}(x_0) = 0$ (достаточно учесть, что каждая круглая скобка $(x_i - x_{0i})$ в выражении (14) выше обращается в нуль в точке x_0).

Осталось доказать, что для любого $i, i=1, 2, \dots, n$, функция $\frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_i}(x_0)$ и все её частные производные до порядка m

включительно обращаются в нуль в точке x_0 , а для этого, по предположению индукции, достаточно показать, что функция $\frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_i}(x)$ определяется равенством типа (13), а точнее,

следующим равенством:

$$(15) \quad \frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \Big|_{x=x_0} - \\ - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left[(x_1 - x_{01}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_n - x_{0n}) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \Big|_{x=x_0}$$

Так как все переменные x_i ($i=1, 2, \dots, n$) равноправны и входят в выражение для $g_{m+1}(x)$ симметрично, то достаточно доказать равенство (15) для $i=1$, то есть следующее равенство:

$$(16) \quad \frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \Big|_{x=x_0} - \\ - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left[(x_1 - x_{01}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_n - x_{0n}) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^k \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \Big|_{x=x_0}$$

Из (14) очевидно, что для доказательства (16) достаточно убедиться, что для каждого номера $k=1, 2, \dots, m+1$ при фиксированных $x_2, x_3, \dots, x_n$, верно следующее равенство:

$$(17) \quad \frac{d}{dx_1} \left[(x_1 - x_{01}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_n - x_{0n}) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^k f(x) \Big|_{x=x_0} = \\ = k \left[(x_1 - x_{01}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_n - x_{0n}) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \Big|_{x=x_0}.$$

Так как при дифференцировании по x_1 переменные $x_2, x_3, \dots, x_n$ фиксированы, то величину:

$$\tilde{D} = (x_2 - x_{02}) \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + (x_n - x_{0n}) \frac{\partial}{\partial x_n}$$

при дифференцировании по x_1 можно рассматривать как постоянную. Кроме этого, заметим, что поскольку символы

$\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ используются для получения значений

частных производных функции f в фиксированной точке x_0 , то при дифференцировании по x_1 указанные символы нужно рассматривать как постоянные величины.

В силу сказанного, для доказательства равенства (17) достаточно доказать, что

$$(18) \quad \frac{d}{dx_1} \left[(x_1 - x_{01}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \tilde{D} \right]^k = k \frac{\partial}{\partial x_1} \left[(x_1 - x_{01}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \tilde{D} \right]^{k-1}.$$

Дифференцируя функцию $\left[(x_1 - x_{01}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \tilde{D} \right]^k$ по x_1 , как

вложенную, и учитывая отмеченную выше независимость от x_1 символов $\tilde{D}$ и $\frac{\partial}{\partial x_1}$, мы получаем равенство (18). Индук-

ция закончена. Лемма 1 доказана

ЛЕММА 2. Пусть $g(x) = g(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная функция, удовлетворяющая двум требованиям:

1) $g(x)$ m раз дифференцируема в точке $x_0 = x_{01}, \dots, x_{0n}$;

2) сама функция $g(x)$ и все ее частные производные по любым переменным $x_1, \dots, x_n$ до порядка m включительно обращаются в нуль в указанной точке x_0 .

Тогда для функции $g(x)$ при $x \rightarrow x_0$ справедлива оценка:

$$g(x) = o(\rho^m), \text{ где } \rho = \|x - x_0\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. При $m=1$ утверждение леммы вытекает из условия дифференцируемости функции $g(x)$ в точке x_0 , которое обеспечивает равенство:

$$g(x) - g(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_{0i}) + o(\rho). \text{ В самом деле, так как}$$

$$g(x_0) = 0, \text{ и } \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) = 0 \text{ для всех } i = 1, \dots, n, \text{ то получается, что}$$

$g(x) = o(\rho)$. Для проведения индукции предположим, что лемма 2 справедлива для некоторого номера $m \geq 1$, и докажем, что в таком случае она справедлива и для номера $m+1$.

Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет двум требованиям леммы 2 для номера $m+1$. Тогда очевидно, что любая частная производная этой функции первого порядка - $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$,

$i = 1, \dots, n$, будет удовлетворять двум требованиям леммы 2 для номера m , а поэтому, по предположению индукции, будет справедлива оценка:

$$(19) \quad \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = o(\rho^m).$$

Заметим теперь, что поскольку $m \geq 1$, то $m+1 \geq 2$, и функция $g(x)$, удовлетворяющая двум требованиям леммы для номера $m+1$, во всяком случае, хотя бы один раз дифференцируема в окрестности точки x_0 . Поэтому для $g(x)$ выполнены условия Теоремы 1 для номера $m = 0$. По ука-

занной теореме, для любой точки x из достаточно малой окрестности точки x_0 найдется число θ , $\theta \in (0;1)$ такое, что справедлива формула:

$$(20) \quad \begin{aligned} g(x) &= g(x_0) + dg(x_0 + \theta(x - x_0)) = \\ &= g(x_0) + \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0 + \theta(x - x_0)). \end{aligned}$$

Заметим, что поскольку точка $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ лежит между точками x_0 и x , то $\|\xi - x_0\| < \rho = \|x - x_0\|$, и поэтому, в силу равенства (19), имеем: $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\xi) = \bar{o}(\|\xi - x_0\|^m) \leq \bar{o}(\rho^m)$.

Подставляя последнюю оценку в правую часть (20) и учитывая, что $g(x_0) = 0$, получаем: $g(x) = \bar{o}(\rho^m) \sum_{i=1}^n |x_i - x_{0i}|$.

А так как $|x_i - x_{0i}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i})^2} = \rho$, то окончательно имеем: $g(x) = \bar{o}(\rho^{m+1})$. Индукция завершена. Лемма 2 доказана.

Обратимся теперь к доказательству теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Утверждение теоремы легко следует из доказанных лемм 1 и 2. Как уже отмечалось выше, для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что при выполнении условий теоремы для функции $g_m(x)$, определённой равенством (13) (а это и есть остаточный член формулы Тейлора для функции $f(x)$), справедлива оценка: $g_m(x) = \bar{o}(\rho^m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем функцию $f(x)$

от переменных, кроме x_i ($1 \leq i \leq n$), и рассмотрим функ-

цию $\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ - функцию одной

В силу леммы 1, сама функция $g_m(x)$ и все ее частные производные по любым переменным $x_1, \dots, x_n$ до порядка m включительно обращаются в нуль в точке x_0 . Но тогда в силу леммы 2, справедлива искомая оценка: $g_m(x) = \bar{o}(\rho^m)$. Теорема доказана.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §6.

- 1) Можно ли в формулировке теоремы 2 убрать условие, что функция $f(x)$ дифференцируема $m-1$ раз в некоторой шаровой окрестности точки x_0 , и оставить только условие её m -кратной дифференцируемости в самой точке x_0 ?
- 2) Напишите подробную формулу для второго дифференциала сложной функции двух переменных: $z = f(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ (здесь $x = x(t)$, $y = y(t)$ не предполагаются линейными функциями).
- 3) Напишите формулу Тейлора-Маклорена для функции $\sin x \cdot \cos y$ до порядка $m=3$ с остаточным членом: а) в форме Лагранжа; б) в форме Пеано.

§7.

ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

В этом параграфе мы рассмотрим понятие локального экстремума для функции n ($n > 1$) переменных, условия его существования и правила отыскания.

7.1. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЛОКАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Точка $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$, внутренняя для области определения функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, называется *точкой её локального экстремума*, если для любой точки x из некоторой её окрестности $U = U(x_0)$ разность $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ отлична от нуля и сохраняет знак. В частности, если $\Delta f > 0$, то это точка *локального минимума*, а если $\Delta f < 0$, то это точка *локального максимума*.

На Рис.2 ниже изображён график функции $z=f(x,y)$ над областью D . Точка A – точка локального максимума, а точка B – точка локального минимума этой функции, $f(A) = z_1$, .

$$f(B) = z_2.$$

ТЕОРЕМА 1. (Необходимое условие существования локального экстремума). Если у функции $f(x)$ в точке x_0 существуют все частные производные f'_{x_k} , и эта точка является точкой локального экстремума, то все частные производные в ней равны нулю, то есть $f'_{x_k}(x_0) = 0$, $k = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем у функции $f(x)$ все переменные, кроме x_k ($1 \leq k \leq n$), и рассмотрим функцию $\varphi(x_k) = f(x_{01}, \dots, x_{0k-1}, x_k, x_{0k+1}, \dots, x_{0n})$ – функцию одной

переменной. Очевидно, что для функции $\varphi(x_k)$ точка x_{0k} является также точкой локального экстремума. Как известно из материала первого семестра, производная функции одной переменной в точке локального экстремума равна нулю. Поэтому $\varphi'(x_{0k}) = f'_{x_k}(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

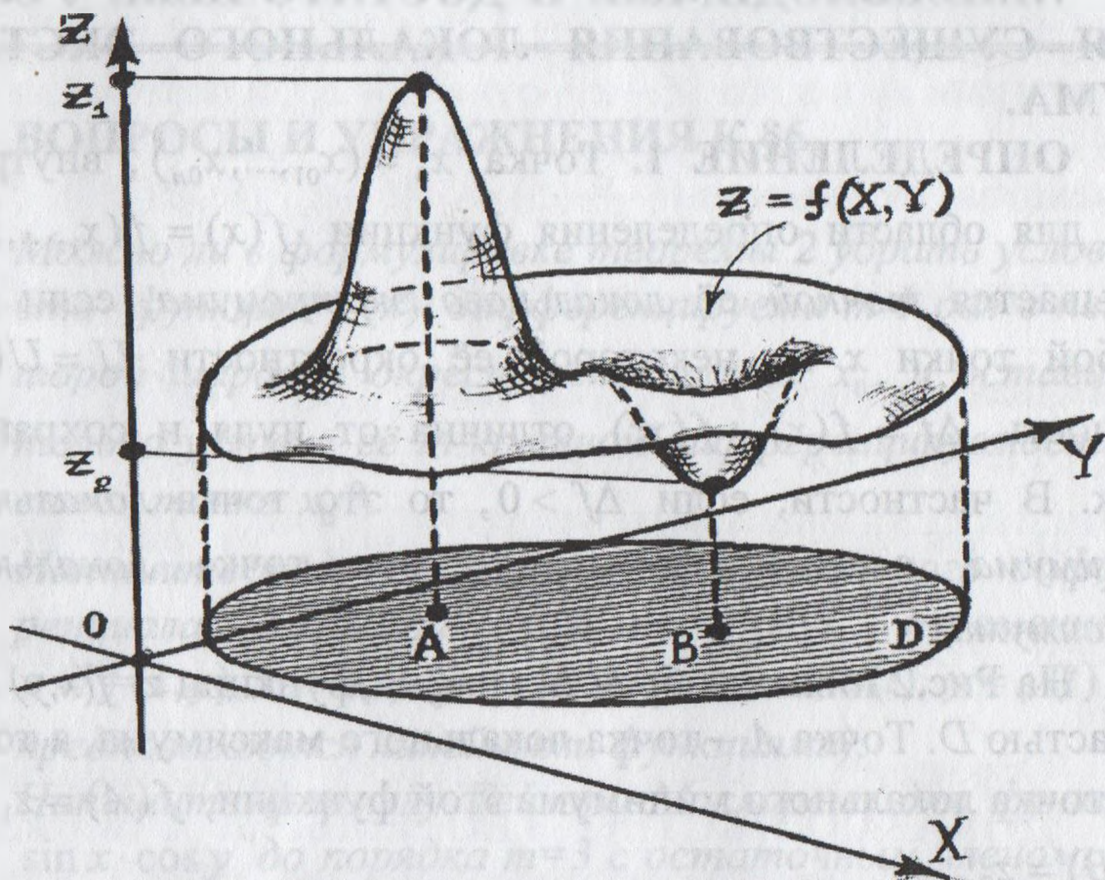


РИС.2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Точка $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ называется *стационарной* для функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, если она внутренняя для её области определения, и все частные производные в ней определены и равны нулю: $f'_{x_k}(x_0) = 0$ ($k = 1, \dots, n$).

Однако одно только условие равенства нулю всех частных производных не является достаточным условием для существования в данной точке локального экстремума.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим функцию $f(x, y) = xy$. Её частные производные в точке $(0,0)$, очевидно, равны нулю. Но разность $\Delta f = f(x, y) - f(0,0) = xy - 0$ больше нуля при одинаковых знаках x и y , и меньше нуля, если у них разные знаки. Таким образом, локального экстремума в точке $(0,0)$ у этой функции нет.

Ниже, при формулировке и доказательстве достаточных условий для существования локального экстремума, мы будем пользоваться некоторыми понятиями и фактами, известными из курса линейной алгебры.

ТЕОРЕМА 2. (Достаточные условия локального экстремума). Пусть функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ и независимых переменных 1 раз дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0 = x_{01}, \dots, x_{0n}$, и дважды дифференцируема в самой точке x_0 . Пусть x_0 - стационарная точка, то есть $df(x_0) = 0$. Тогда, если второй дифференциал $d^2f(x_0)$ представляет собой знакоопределённую квадратичную форму, то x_0 - точка локального экстремума. При этом, если форма $d^2f(x_0)$ положительно определена, то x_0 - точка локального минимума, если $d^2f(x_0)$ отрицательно определена, то x_0 - точка локального максимума. Если же квадратичная форма $d^2f(x_0)$ - знакопеременна, то локального экстремума в точке x_0 нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим разность Δf по формуле Тейлора при $n=2$ с остаточным членом в форме

$$\text{Пеано: } \Delta f = f(x) - f(x_0) = df(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \bar{o}(\|\Delta x\|^2) =$$

$$= \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f''_{x_i x_j}(x_0) \Delta x_i \Delta x_j + \bar{o}(\|\Delta x\|^2)$$

$$\text{Обозначим } h_i = \frac{\Delta x_i}{\|\Delta x\|}, \quad f''_{x_i x_j}(x_0) = a_{ij}, \quad \alpha = \alpha(\|x\|) = \frac{\bar{o}(\|\Delta x\|^2)}{\|\Delta x\|^2} -$$

бесконечно малая при $\|\Delta x\| \rightarrow 0$. Тогда Δf представляется в

$$\text{виде: } \Delta f = \frac{1}{2} \|\Delta x\|^2 \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \cdot h_i h_j + \alpha \right). \text{ Заметим, что вектор}$$

$$h = \{h_1, \dots, h_n\} \text{ имеет норму } \|h\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2} = 1, \text{ то есть это эле-}$$

мент единичной сферы S^{n-1} пространства R^n .

Рассмотрим случай, когда $d^2 f(x_0)$ - положительно определённая квадратичная форма. В этом случае квадратичная форма $\Phi(h) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} h_i h_j$ - также положительно

определённая непрерывная функция на единичной сфере S^{n-1} , являющейся замкнутым ограниченным множеством в R^n .

Следовательно, по второй теореме Вейерштрасса, функция $\Phi(h)$ достигает на S^{n-1} своего инфимума, то есть

существует такая точка $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in S^{n-1}$, в которой $\Phi(\xi) = \inf_{h \in S^{n-1}} \{\Phi(h)\} = \mu$. Поскольку всюду на сфере

$\Phi(h) > 0$, то $\Phi(h) \geq \Phi(\xi) = \mu > 0$. Воспользовавшись этим,

получаем: $\Delta f = \frac{1}{2} \|\Delta x\|^2 (\Phi(h) + \alpha) \geq \frac{1}{2} \|\Delta x\|^2 (\mu + \alpha)$. Так как

$\alpha \rightarrow 0$ при $\|\Delta x\| \rightarrow 0$, то найдётся такое $\delta = \delta(\mu) > 0$, что

при $\|\Delta x\| < \delta$ будет $|\alpha| < \frac{\mu}{2}$. При этих условиях

$$\Delta f \geq \frac{1}{2} \|\Delta x\|^2 (\mu + \alpha) > \frac{1}{2} \|\Delta x\|^2 (\mu - \frac{\mu}{2}) = \frac{1}{2} \|\Delta x\|^2 \frac{\mu}{2} > 0.$$

Итак, для любого x такого, что $\|\Delta x\| < \delta$, всегда будет $\Delta f > 0$. Следовательно, точка x_0 - точка локального минимума.

В случае отрицательно определённой квадратичной формы $d^2 f(x_0)$ совершенно аналогично доказывается, что точка x_0 - точка локального максимума.

Пусть теперь $d^2 f(x_0)$ - знакопеременная квадратичная форма. Тогда, пользуясь предыдущими обозначениями, имеем: $\Delta f = \frac{1}{2} \rho^2 (\Phi(h) + \alpha)$, где $\rho = \|\Delta x\|$, а $\Phi(h)$ - знакопеременная квадратичная форма на единичной сфере S^{n-1} .

Следовательно, существуют такие точки $h', h'' \in S^{n-1}$, что $\Phi(h') < 0$, $\Phi(h'') > 0$. При этом заметим, что α зависит от ρ , и $\alpha = \alpha(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, а $\Phi(h)$ от ρ не зависит. Поэтому, взяв ρ_0 достаточно малым, можно добиться,

чтобы $|\alpha| = |\alpha(\rho_0)| < \min \left\{ \frac{|\Phi(h')|}{2}, \frac{|\Phi(h'')|}{2} \right\}$. При этих условиях

будет одновременно: $\Phi(h') + \alpha(\rho_0) < 0$, $\Phi(h'') + \alpha(\rho_0) > 0$.

Тогда для точек $x' = x_0 + \rho_0 h'$, $x'' = x_0 + \rho_0 h''$ будем иметь:

$$(\Delta f)_1 = f(x') - f(x_0) = \frac{1}{2} (\rho_0)^2 (\Phi(h') + \alpha(\rho_0)) < 0,$$

$$\text{и } (\Delta f)_2 = f(x'') - f(x_0) = \frac{1}{2} (\rho_0)^2 (\Phi(h'') + \alpha(\rho_0)) > 0.$$

Итак, приращение функции меняет знак, следовательно, точка x_0 не является в этом случае точкой экстремума функции $f(x)$. Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случаях квази-знакоопределённости (или, другими словами, полуопределённости) квадратичной формы второго дифференциала $d^2f(x_0)$ ответ о существовании локального экстремума в точке x_0 неясен. (Напомним, что квадратичная форма $A(h) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j$ называется квази-знакоопределённой (или полуопределённой), если $A(h) \geq 0$ при любом $h = (h_1, \dots, h_n)$ (или $A(h) \leq 0$ при любом h), и кроме того, существует такой элемент $h_0 \neq 0$, что $A(h_0) = 0$.)

ПРИМЕР 2. Рассмотрим функции $f(x, y) = x^3 + y^3$, $g(x, y) = x^4 + y^4$. В точке $(0; 0)$ вторые дифференциалы обеих функций равны нулю (проверьте!). Однако несложно убедиться (сделайте это самостоятельно!), что у функции $g(x, y)$ имеется экстремум (какой?) в точке $(0; 0)$, а у функции $f(x, y)$ в этой точке экстремума нет.

7.2. СЛУЧАЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Рассмотрим более подробно достаточные условия существования локального экстремума для случая функции двух переменных.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $f(x_1, x_2)$ дифференцируема в некоторой окрестности $U = U(x_0)$ точки $x_0 = (x_{01}, x_{02})$ и дважды дифференцируема в самой точке x_0 . Пусть точка x_0 является стационарной, а второй дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 имеет вид $d^2f(x_0) = a_{11}(dx_1)^2 + 2a_{12}dx_1dx_2 + a_{22}(dx_2)^2$, где $a_{ij} = f''_{x_i x_j}(x_0)$.

$1 \leq i, j \leq 2$. Тогда, если определитель $A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, то

точка x_0 является точкой локального экстремума (локального максимума, если $a_{11} > 0$, и локального минимума, если $a_{11} < 0$). Если же $A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} < 0$, то экстремума в точке x_0 нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из курса линейной алгебры известен критерий Сильвестра знакоопределённости квадратичной формы, заключающийся в следующем: если все главные миноры матрицы квадратичной формы положительны, то квадратичная форма положительно определена. Если же знаки главных миноров чередуются, начиная с минуса, то квадратичная форма отрицательно определена. В силу этого критерия, при условии $A_2 > 0$ и $a_{11} \neq 0$ второй дифференциал $d^2 f(x_0; dx)$ является знакоопределённой (положительной или отрицательной, в зависимости от знака a_{11}) квадратичной формой. Следовательно, по теореме 2, в этом случае в точке x_0 имеется локальный экстремум.

Пусть теперь $A_2 < 0$. Покажем, что тогда экстремума нет.

Предположим сначала, что $a_{11} \neq 0$. Обозначим, как и в теореме 2, $h_i = \frac{dx_i}{\rho}$, $i = 1, 2$, где $\rho = \|dx\| = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2}$.

Тогда $d^2 f(x_0; dx) = a_{11}(dx_1)^2 + 2a_{12}dx_1dx_2 + a_{22}(dx_2)^2 =$
 $= \rho^2[a_{11}(h_1)^2 + 2a_{12}h_1h_2 + a_{22}(h_2)^2] =$
 $= \frac{\rho^2}{a_{11}}[a_{11}^2(h_1)^2 + 2a_{12}a_{11}h_1h_2 + a_{12}^2(h_2)^2 + (a_{22}a_{11} - a_{12}^2)(h_2)^2] =$
 $= \frac{\rho^2}{a_{11}}[(a_{11}h_1 + a_{12}h_2)^2 + A_2(h_2)^2].$ Следовательно, взяв $h_1 = 1$,
 и $h_2 = 0$, получим для второго дифференциала:

$d^2 f(x_0; dx) = \frac{\rho^2}{a_{11}} \cdot (a_{11})^2 = \rho^2 a_{11}$, то есть он имеет такой же

знак, как a_{11} . А с другой стороны, если взять

$h_1 = -\frac{a_{12}}{\sqrt{(a_{11})^2 + (a_{12})^2}}, h_2 = \frac{a_{11}}{\sqrt{(a_{11})^2 + (a_{12})^2}}$, то второй диф-

ференциал приобретает следующий вид: $d^2 f(x_0; dx) =$

$\frac{\rho^2}{a_{11}} \cdot A_2 \frac{(a_{11})^2}{(a_{11})^2 + (a_{12})^2} = \frac{\rho^2 a_{11} A_2}{(a_{11})^2 + (a_{12})^2}$ - и имеет, следовательно,

но, знак, противоположный знаку a_{11} . Таким образом, второй дифференциал является в этом случае знакопеременной квадратичной формой, и поэтому, в силу теоремы 2, экстремума в точке x_0 нет.

Пусть теперь $A_2 < 0$, и $a_{11} = 0$. Заметим, что в этом случае обязательно $a_{12} \neq 0$. Тогда получаем: $d^2 f(x_0; dx) = \rho^2 h_2 (2a_{12} h_1 + a_{22} h_2)$. Зафиксируем $h_1^0 \neq 0$ и возьмём $|h_2^0|$ настолько малым, чтобы выражение в круглых скобках имело такой же знак, как произведение $a_{12} h_1^0$ (Поскольку $(h_1^0)^2 + (h_2^0)^2 = 1$, то для этого достаточно взять

$|h_2^0| < \frac{|a_{12}|}{\sqrt{(a_{12})^2 + (a_{22})^2}}$ - проверьте это самостоятельно!).

Тогда $d^2 f(x_0; \{\rho h_1^0, \rho h_2^0\})$ и $d^2 f(x_0; \{\rho h_1^0, \rho(-h_2^0)\})$ будут иметь разные знаки, то есть при изменении знака h_2^0 знак $d^2 f$ также меняется. Итак, второй дифференциал в данном случае есть знакопеременная квадратичная форма, и по теореме 2, экстремума в точке x_0 нет. Теорема 3 полностью доказана.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §7.

- 1) Пользуясь предложенными в данном параграфе методами, найдите точки локальных экстремумов и значения функции в них, если

$$f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0, y > 0).$$

- 2) Найдите точки локальных экстремумов следующей функции трёх переменных:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$$

- 3) Определите множества точек локальных экстремумов функций:

а) $f(x) = |x| + |y|$; б) $g(x, y) = |x| - |y|$.

НЕЯВНАЯ ФУНКЦИЯ.

Этот параграф посвящён обсуждению понятия неявной функции, условий её существования, непрерывности, дифференцируемости, а также правил вычисления её частных производных первого и второго порядков.

Довольно часто при решении задач зависимость переменной u от n переменных $(x_1, \dots, x_n)$ бывает задана в виде уравнения следующего вида:

$$(1) \quad F(u, x_1, \dots, x_n) = 0,$$

где F - некоторая функция $(n+1)$ переменной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $u = u(x_1, \dots, x_n)$ называется *неявной функцией, определяемой функциональным уравнением (1) в области G* , если при подстановке её в уравнение (1) оно обращается в области G в тождество. $F(u(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n) \equiv 0$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим уравнение:

$$(*) \quad F(u, x_1, x_2) = u^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$$

Легко видеть, что две непрерывные функции, задаваемые формулой: $u_{1,2} = \pm \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$, являются неявными функциями, определяемыми уравнением $(*)$ в замкнутом круге D^1 радиуса 1 с центром в начале координат. Однако кроме них, есть бесконечное множество других неявных функций, не являющихся непрерывными, которые можно задавать так:

$$u_G(x_1, x_2) = \begin{cases} +\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, & (x_1, x_2) \in G, \\ -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, & (x_1, x_2) \notin D \setminus G, \end{cases}$$

где G - произвольное собственное подмножество круга D^1 .

На Рис.3 ниже показано, что часть сферы, задаваемой уравнением (*), лежащая в малой окрестности точки A , однозначно проектируется на плоскость XOY . Это означает, что уравнение (*) однозначно разрешимо в этой окрестности относительно u , и следовательно определяет единственным образом явную функцию $u=u(x,y)$. И напротив, часть сферы, лежащая в малой окрестности точки B , неоднозначно проектируется на плоскость XOY . Это означает, что уравнение (*) в этой окрестности не является однозначно разрешимым относительно u . Отметим, что в точке A производная $\frac{\partial F}{\partial u} \neq 0$, а в точке B наоборот, $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$. Ниже мы выясним, что это как раз имеет принципиальное значение для однозначной разрешимости уравнения (*) относительно переменной u .

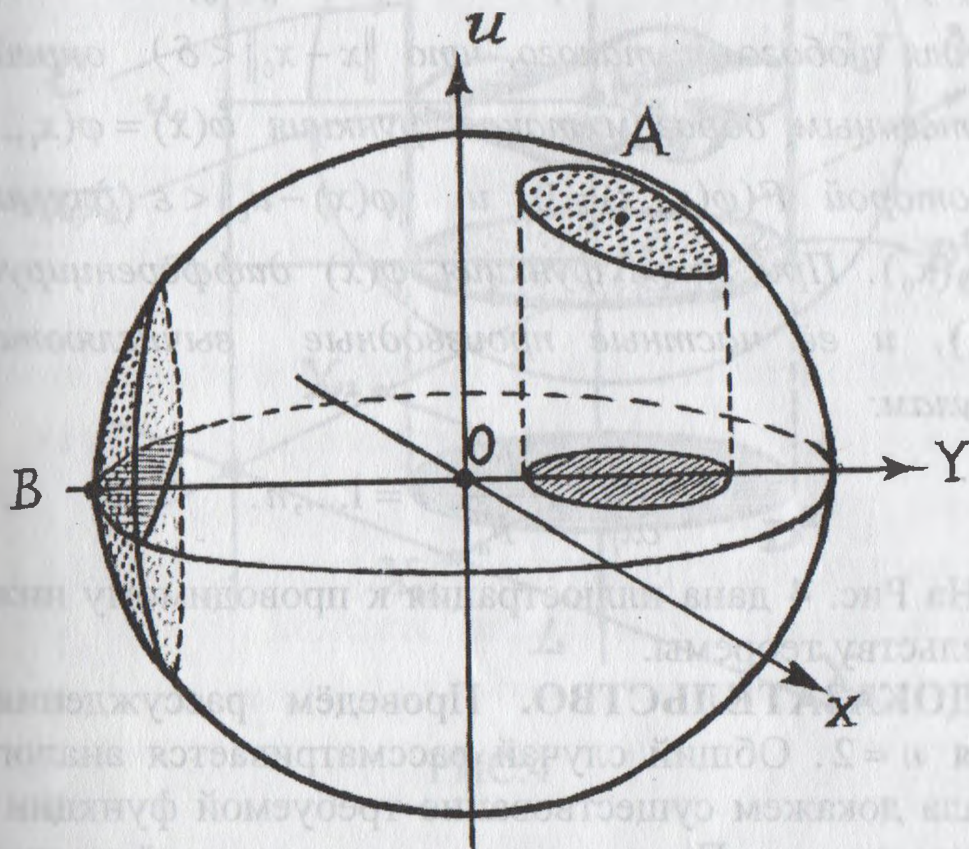


РИС.3

8.1. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ.

Рассмотрим вопрос, при каких условиях в окрестности данной точки гарантировано существование единственной непрерывной и дифференцируемой неявной функции, определяемой данным функциональным уравнением типа (1).

ТЕОРЕМА 1. (О существовании и дифференцируемости неявной функции). Пусть функция $F(u, x) = F(u, x_1, \dots, x_n)$ дифференцируема в некоторой окрестности $V = V(u_0, x_0)$ точки (u_0, x_0) . Пусть, кроме того, $F(u_0, x_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, x_0) \neq 0$, и $\frac{\partial F}{\partial u}$ непрерывна в точке (u_0, x_0) . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что в δ -окрестности $W_\delta(x_0)$ точки x_0 (то есть для любого x такого, что $\|x - x_0\| < \delta$) определена единственным образом такая функция $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, для которой $F(\varphi(x), x) = 0$, и $\|\varphi(x) - u_0\| < \varepsilon$ для любого $x \in W_\delta(x_0)$. При этом функция $\varphi(x)$ дифференцируема в $W_\delta(x_0)$, и её частные производные вычисляются по формулам:

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_u}, \quad i = 1, \dots, n.$$

На Рис. 4 дана иллюстрация к проводимому ниже доказательству теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведём рассуждения для случая $n = 2$. Общий случай рассматривается аналогично. Сначала докажем существование требуемой функции и её единственность. Предположим для определённости, что

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, x_{01}, x_{02}) > 0. \quad \text{В силу непрерывности } \frac{\partial F}{\partial u} \text{ в точке}$$

(u_0, x_{01}, x_{02}) , существует окрестность $U = U(u_0, x_{01}, x_{02})$, в которой $\frac{\partial F}{\partial u}$ также является положительной (кроме того, можно считать, что $U \subseteq V$, то есть всюду в U функция $F(u, x_1, x_2)$ дифференцируема). Следовательно, функция $F(u, x_{01}, x_{02})$, как функция одной переменной u , монотонно возрастает на пересечении окрестности U с прямой L , задаваемой уравнениями $L: \begin{cases} x_1 = x_{01} \\ x_2 = x_{02} \end{cases}$ (см. Рис.4).

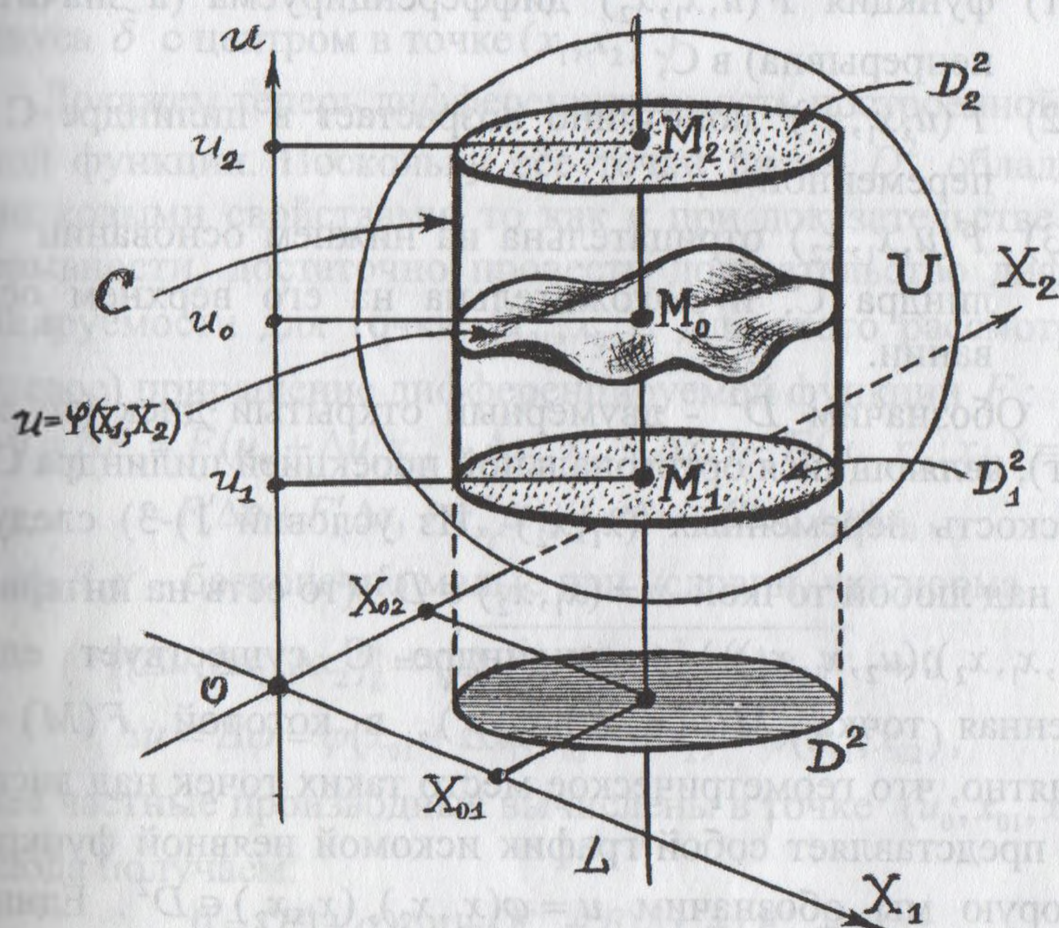


РИС.4

Следовательно, для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно указать точки $M_1(u_1, x_{01}, x_{02})$, $M_2(u_2, x_{01}, x_{02}) \in U \cap L$ такие, что $F(M_1) < 0$, а $F(M_2) > 0$, причём $u_0 - \varepsilon < u_1 < u_0 <$

$u_2 < u_0 + \varepsilon$. Далее, в плоскостях $P_1: u = u_1$, $P_2: u = u_2$ можно выбрать шаровые окрестности D_i^2 точек M_i ($i = 1, 2$) такие, что $F(M) < 0$ при $M = M(u, x_1, x_2) \in D_1^2$, и $F(M) > 0$ при $M \in D_2^2$. Можно считать, что эти окрестности одного и того же радиуса $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$. Таким образом, мы получили

цилиндр $C: \begin{cases} u_1 < u < u_2 \\ (x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 < \delta \end{cases}$, - удовлетворяющий

следующим условиям:

- 1) функция $F(u, x_1, x_2)$ дифференцируема (а значит, и непрерывна) в C ;
- 2) $F(u, x_1, x_2)$ монотонно возрастает в цилиндре C по переменной u ;
- 3) $F(u, x_1, x_2)$ отрицательна на нижнем основании цилиндра C , и положительна на его верхнем основании.

Обозначим D^2 - двумерный открытый диск (то есть круг), являющийся ортогональной проекцией цилиндра C на плоскость переменных (x_1, x_2) . Из условий 1)-3) следует, что над любой точкой $x = (x_1, x_2) \in D^2$ (то есть на интервале $((u_1, x_1, x_2); (u_2, x_1, x_2))$) в цилиндре C существует единственная точка $M(u(x_1, x_2), x_1, x_2)$, в которой $F(M) = 0$. Понятно, что геометрическое место таких точек над диском D^2 представляет собой график искомой неявной функции которую мы обозначим $u = \varphi(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in D^2$. Единственность этой функции очевидна из её построения.

Покажем теперь, что построенная выше неявная функция непрерывна в области D^2 .

При построении функции $u = \varphi(x_1, x_2)$ для произвольного $\varepsilon > 0$ мы подобрали такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что как только выполнено неравенство:

$$\|x - x_0\| = \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2} < \delta,$$

для функции $u = \varphi(x_1, x_2)$ немедленно выполняется неравенство: $u_0 - \varepsilon < u_1 < u = \varphi(x_1, x_2) < u_2 < u_0 + \varepsilon$, и следовательно, $|\varphi(x_1, x_2) - u_0| = |\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_{01}, x_{02})| < \varepsilon$. Это означает непрерывность функции $u = \varphi(x_1, x_2)$ в точке (x_{01}, x_{02}) . Непрерывность её в любой другой точке $(x_1, x_2) \in D^2$ доказывается совершенно аналогично. (Достаточно вместо δ взять число $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\varepsilon; x_1, x_2) > 0$ такое, что $D_{\tilde{\delta}}^2 \subset D^2$, где $D_{\tilde{\delta}}^2$ - диск радиуса $\tilde{\delta}$ с центром в точке (x_1, x_2) .)

Докажем теперь дифференцируемость построенной неявной функции. Поскольку все точки диска D^2 обладают одинаковыми свойствами, то как и при доказательстве непрерывности, достаточно провести доказательство дифференцируемости для точки (x_{01}, x_{02}) . Для этого рассмотрим (нулевое) приращение дифференцируемой функции F :

$$\begin{aligned} 0 = \Delta F &= F(u_0 + \Delta u, x_{01} + \Delta x_1, x_{02} + \Delta x_2) - F(u_0, x_{01}, x_{02}) = \\ &= F'_u \Delta u + F'_{x_1} \Delta x_1 + F'_{x_2} \Delta x_2 + \alpha \Delta u + \beta \Delta x_1 + \gamma \Delta x_2, \end{aligned}$$

где α, β, γ - бесконечно малые при условии, что норма

$$\|\{\Delta u, \Delta x_1, \Delta x_2\}\| = \sqrt{\Delta u^2 + (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2} \rightarrow 0,$$

$$\Delta u = \Delta \varphi = \varphi(x_{01} + \Delta x_1, x_{02} + \Delta x_2) - \varphi(x_{01}, x_{02}),$$

и все частные производные вычислены в точке (u_0, x_{01}, x_{02}) .

Отсюда получаем:

$$(3) \quad 0 = (F'_u + \alpha) \Delta u + (F'_{x_1} + \beta) \Delta x_1 + (F'_{x_2} + \gamma) \Delta x_2,$$

причём из условия теоремы $F'_u \neq 0$, следовательно, при достаточно малом α будет также $(F'_u + \alpha) \neq 0$. Поэтому из (3) можно выразить приращение неявной функции $\Delta u = \Delta \varphi$.

$$\text{Имеем: } \Delta \varphi = \Delta u = -\frac{(F'_{x_1} + \beta)}{(F'_u + \alpha)} \Delta x_1 - \frac{(F'_{x_2} + \gamma)}{(F'_u + \alpha)} \Delta x_2.$$

Далее, так как $\alpha, \beta, \gamma \rightarrow 0$ при $\|\{\Delta u, \Delta x_1, \Delta x_2\}\| \rightarrow 0$, то пределы коэффициентов при $\Delta x_1, \Delta x_2$ равны соответственно $-\frac{F'_{x_1}}{F'_u}, -\frac{F'_{x_2}}{F'_u}$. Следовательно, сами коэффициенты можно представить в виде сумм этих пределов и некоторых бесконечно малых ξ_1, ξ_2 (при $\|\{\Delta u, \Delta x_1, \Delta x_2\}\| \rightarrow 0$). Получаем:

$$(4) \quad \begin{aligned} \Delta \varphi = \Delta u &= \left(-\frac{F'_{x_1}}{F'_u} + \xi_1\right) \Delta x_1 + \left(-\frac{F'_{x_2}}{F'_u} + \xi_2\right) \Delta x_2 = \\ &= \left(-\frac{F'_{x_1}}{F'_u}\right) \Delta x_1 + \left(-\frac{F'_{x_2}}{F'_u}\right) \Delta x_2 + \xi_1 \Delta x_1 + \xi_2 \Delta x_2. \end{aligned}$$

Величина $\xi_1 \Delta x_1 + \xi_2 \Delta x_2$ является бесконечно малой при $\|\{\Delta x_1, \Delta x_2\}\| = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2} \rightarrow 0$. (В самом деле, из условия: $\|\{\Delta x_1, \Delta x_2\}\| \rightarrow 0$ следует, в силу непрерывности функции φ , что и $\Delta \varphi = \Delta u \rightarrow 0$, а значит, $\|\{\Delta u, \Delta x_1, \Delta x_2\}\| \rightarrow 0$). Учитывая это, заключаем, что:

- 1) равенство (4) показывает, что $\varphi(x_1, x_2)$ дифференцируема в точке (x_{01}, x_{02}) ;
- 2) из равенства (4) видно, что частные производные функции $\varphi(x_1, x_2)$ вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_u}, \quad i = 1, 2.$$

Теорема полностью доказана.

В качестве следствия из теоремы 1 о существовании неявной функции можно сформулировать следующее утверждение о существовании и дифференцируемости обратной функции.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 , и её производная $f'(x)$ отлична от нуля в точке x_0 и непрерывна в этой точке. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая δ -окрестность точки y_0 ($y_0 = f(x_0)$), в которой единственным образом определена дифференцируемая обратная функция $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$, удовлетворяющая условиям:

$$1) \varphi(y_0) = f^{-1}(y_0) = x_0,$$

$$2) |\varphi(y) - x_0| < \varepsilon, \quad 3) \varphi'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $x = \varphi(y)$ как неявную функцию, определяемую функциональным уравнением: $F(x, y) = f(x) - y = 0$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Из условий следствия ясно, что функция $F(x, y)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, и $F(M_0) = F(x_0, y_0) = 0$. Кроме того, её частная производная $F'_x(M_0) = f'(x_0) \neq 0$, и $F'_x(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1. Из теоремы 1 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая δ -окрестность $V_\delta(y_0)$ точки y_0 , в которой единственным образом определена неявная функция $x = \varphi(y)$, обращающая равенство: $F(x, y) = f(x) - y = 0$ в тождество: $f(\varphi(y)) \equiv y$, и удовлетворяющая условию: $|\varphi(y) - x_0| < \varepsilon$ всюду в окрестности $V_\delta(y_0)$. Это означает, что $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$ - обратная функция к $f(x)$ в рассматриваемой окрестности. Кроме того, из теоремы 1 следует, что эта функция дифференцируема в той же окрестности, и её производная (в данном случае не частная, а полная, так как это функция одной переменной) вычисляется по фор-

муле: $\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d(f^{-1})}{dy} = -\frac{F'_y}{F'_x} = -\frac{(-1)}{df/dx} = \left(\frac{df}{dx}\right)^{-1}$ (Эта формула

для производной обратной функции была получена в первом семестре другим способом). Следствие 1 доказано.

8.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОТ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ.

Пусть задано функциональное уравнение (1), и для функции $F(u, x) = F(u, x_1, \dots, x_n)$ выполнены все условия теоремы 1 в окрестности $V(M_0)$ точки $M_0(u_0, x_1, \dots, x_n)$. Тогда, по теореме 1, в некоторой окрестности $W(x_0)$ точки $x_0 = (x_1, \dots, x_n)$ существует единственная дифференцируемая неявная функция $u = u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$, частные производные которой вычисляются по формулам (2). При этом функция $F(u, x)$ и её частные производные, при подстановке в них вместо переменной u неявной функции $u = u(x_1, \dots, x_n)$, становятся сложными функциями от переменных $(x_1, \dots, x_n)$. Для вычисления частных производных сложных функций такого типа по переменным $(x_1, \dots, x_n)$ полезно ввести следующее понятие полной частной производной сложной функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Полной частной производной по переменной x_k сложной функции $\Phi(u(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n)$

называется выражение $\frac{D}{Dx_k} \Phi(u, x_1, \dots, x_n)$, определяемое из

равенства:

$$(5) \quad \frac{D}{Dx_k} \Phi(u, x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}.$$

Теперь мы можем сформулировать следующий факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если для некоторой функции $F(u, x) = F(u, x_1, \dots, x_n)$ выполнены все условия теоремы 1 в окрестности $V(M_0)$ точки $M_0(u_0, x_1, \dots, x_n)$, и сверх того, функция $F(u, x) = F(u, x_1, \dots, x_n)$ дважды дифференцируема в окрестности $V(M_0)$, то неявная функция $u = u(x_1, \dots, x_n)$, существующая согласно теореме 1, имеет в некоторой окрестности точки x_0 вторые частные производные, вычисляемые по формулам:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{F'_u F''_{x_j u} F'_{x_i} - F''_{x_j x_i} (F'_u)^2 - F'_{x_j} F''_{uu} F'_{x_i} + F''_{ux_i} F'_{x_j} F'_u}{(F'_u)^3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведём соответствующие вычисления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \frac{D}{Dx_i} \left(-\frac{F'_{x_j}}{F'_u} \right) = -\frac{\frac{D}{Dx_i} (F'_{x_j}) F'_u - F'_{x_j} \frac{D}{Dx_i} (F'_u)}{(F'_u)^2} = \\ &= -\frac{(F''_{x_j u} u'_{x_i} + F''_{x_j x_i}) F'_u - F'_{x_j} (F''_{uu} u'_{x_i} + F''_{ux_i})}{(F'_u)^2} = \\ &= -\frac{-F'_u F''_{x_j u} u'_{x_i} - F'_{x_j x_i} F'_u + F'_{x_j} F''_{uu} u'_{x_i} + F''_{ux_i} F'_{x_j}}{(F'_u)^2}. \end{aligned}$$

Далее, подставляя в полученное выражение формулу:

$$u'_{x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_u}, \text{ окончательно получаем:}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{F'_u F''_{x_j u} F'_{x_i} - F''_{x_j x_i} (F'_u)^2 - F'_{x_j} F''_{uu} F'_{x_i} + F''_{ux_i} F'_{x_j} F'_u}{(F'_u)^3},$$

что и требовалось. Утверждение 1 доказано.

Аналогично, при соответствующих условиях на функцию $F(u, x)$, вычисляются частные производные третьего и высших порядков неявной функции $u = \varphi(x)$.

ПРИМЕР 2. Найти частную производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}$ от неявной функции $u = u(x_1, x_2)$, задаваемой функциональным уравнением: $u^2 + x_1^3 + x_2^3 - 1 = 0$. Используя формулы для частных производных первого порядка и выкладки, приводящие к формуле (6), получим: $u'_{x_1} = -\frac{3x_1^2}{2u}$; $u'_{x_2} = -\frac{3x_2^2}{2u}$; и следовательно, $u''_{x_1 x_2} = \frac{D(u'_{x_1})}{Dx_2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(-\frac{3x_1^2}{2u} \right) \cdot \left(-\frac{3x_2^2}{2u} \right) = \frac{3x_1^2}{2u^2} \cdot \left(-\frac{3x_2^2}{2u} \right) = -\frac{9x_1^2 x_2^2}{4u^3}$.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §8.

- 1) Можно ли в приведённом доказательстве теоремы 1 опустить доказательство непрерывности неявной функции, а оставить только доказательство её дифференцируемости (ведь из дифференцируемости, как известно, следует непрерывность)?
- 2) Как вычислить производную 3-го порядка $u'''_{x_1 x_2 x_1}$ для неявной функции u из примера 2? Напишите соответствующую формулу.
- 3) Пользуясь формулами (2) и (6), вычислите производные y'_x, y''_{xx} неявной функции $y = y(x)$, задаваемой уравнением: а) эллипса $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) гиперболы

$$\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

§9.

НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СИСТЕМОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В §8 мы рассматривали вопрос о существовании и дифференцируемости неявной функции, определяемой одним функциональным уравнением. В этом параграфе мы рассмотрим аналогичный вопрос для совокупности m ($m > 1$) неявных функций, определяемых системой m функциональных уравнений.

Итак, пусть задана система функциональных уравнений:

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} F_1(u_1, u_2, \dots, u_m, x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ F_2(u_1, u_2, \dots, u_m, x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ \text{-----} \\ F_m(u_1, u_2, \dots, u_m, x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \right\},$$

и требуется найти её решение в виде набора функций

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ u_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \text{-----} \\ u_m &= \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \right\},$$

обращающих эту систему в систему тождеств в некоторой заданной области $G \subseteq R^n$, где R^n - пространство переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

9.1 УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СИСТЕМЫ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ.

Изучим вопрос о разрешимости системы функциональных уравнений (1) относительно $u_1, u_2, \dots, u_m$. Решение (2) системы (1) мы будем называть *непрерывным и диффе-*

ренцируемым в некоторой области G изменения переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, если каждая из функций (2) непрерывна и дифференцируема в области G .

Рассмотрим m функций $F_1, F_2, \dots, F_m$, стоящих в левых частях системы (1), и составим из частных производных этих функций определитель:

$$(3) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \frac{\partial F_m}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}$$

Будем называть определитель вида (3) *определителем Якоби* (или кратко *якобианом*) функций $F_1, F_2, \dots, F_m$ по переменным $u_1, u_2, \dots, u_m$ и кратко обозначать его символом

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(u_1, u_2, \dots, u_m)}.$$

Теперь мы можем сформулировать важное обобщение теоремы 1 из §8.

ТЕОРЕМА 1. (о существовании системы неявных функций, определяемых системой функциональных уравнений). Пусть m функций

$$(4) \quad \left. \begin{aligned} &F_1(u_1, u_2, \dots, u_m, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &F_2(u_1, u_2, \dots, u_m, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots \\ &F_m(u_1, u_2, \dots, u_m, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \right\}$$

дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0 = M_0(u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0m}, x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in R^{n+m}$, причем частные

производные этих функций по переменным $u_1, u_2, \dots, u_m$ непрерывны в точке M_0 . Тогда, если в точке M_0 все функции (4) обращаются в нуль, а якобиан $\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(u_1, u_2, \dots, u_m)}$ отличен от нуля в M_0 , то для любых положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ найдется такая окрестность точки $N_0(x_{01}, \dots, x_{0n})$ в пространстве R^n , в которой существует единственный набор из m функций (2), удовлетворяющий условиям: $|u_1 - u_{01}| < \varepsilon_1, |u_2 - u_{02}| < \varepsilon_2, \dots, |u_m - u_{0m}| < \varepsilon_m$, - и являющийся решением системы уравнений (1), причем это решение непрерывно и дифференцируемо в указанной окрестности точки N_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, заметим, что при $m=1$ теорема 1 совпадает с доказанной выше теоремой 1 из §8, поскольку в этом случае якобиан (3) совпадает с частной производной $\frac{\partial F_1}{\partial u_1}$. Проведём рассуждения методом математической индукции.

При $m=1$ теорема уже доказана. Поэтому для проведения индукции достаточно предположить её справедливой для системы $m-1$ функциональных уравнений при некотором $m \geq 2$ и доказать её справедливость для системы m функциональных уравнений.

Итак, по условию теоремы, якобиан

$$(5) \quad \Delta = \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(u_1, u_2, \dots, u_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля в точке M_0 . Тогда хотя бы один из миноров $(m-1)$ -го порядка этого якобиана также отличен от нуля в точке M_0 . Не ограничивая общности, будем считать, что в точке M_0 отличен от нуля обведенный пунктиром минор, стоящий в левом верхнем углу функциональной матрицы. Тогда, по предположению индукции, первые $m-1$ уравнений системы (1) разрешимы относительно $u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$. Точнее, для достаточно малых положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m-1}$ найдется такая окрестность точки $\tilde{N}_0(u_{0m}, x_{01}, \dots, x_{0n})$ пространства R^{n+1} переменных $(u_m, x_1, \dots, x_n)$, в которой единственным образом определены $(m-1)$ функций:

$$(6) \quad \begin{cases} u_1 = \Phi_1(u_m, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ u_{m-1} = \Phi_{m-1}(u_m, x_1, \dots, x_n) \end{cases},$$

удовлетворяющих условиям $|u_1 - u_{01}| < \varepsilon_1, \dots, |u_{m-1} - u_{0m-1}| < \varepsilon_{m-1}$ и являющихся единственным и дифференцируемым решением системы первых $m-1$ уравнений системы (1).

Подставим найденные функции (6) в левую часть последнего из уравнений (1). При этом последняя из функций (4) превращается в некоторую функцию ψ , зависящую только от переменных $u_m, x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned}
 & F_m(u_1, \dots, u_{m-1}, u_m, x_1, \dots, x_n) = \\
 (7) \quad & = F_m[\Phi_1(u_m, x_1, \dots, x_n), \dots, \Phi_{m-1}(u_m, x_1, \dots, x_n), u_m, x_1, \dots, x_n] = \\
 & = \psi(u_m, x_1, \dots, x_n).
 \end{aligned}$$

Таким образом, последнее из уравнений системы (1) превращается в уравнение:

$$(8) \quad \psi(u_m, x_1, \dots, x_n) = 0.$$

В силу равенства (7), функцию $\psi(u_m, x_1, \dots, x_n)$ можно рассматривать как сложную функцию. Тогда, применяя теорему о дифференцируемости сложной функции, мы можем утверждать, что функция $\psi(u_m, x_1, \dots, x_n)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $\tilde{N}_0(u_{0m}, x_{01}, \dots, x_{0n})$ пространства R^{n+1} . Равенство (7) и последнее из уравнений (1) позволяют утверждать, что $\psi(\tilde{N}_0) = \psi(u_{0m}, x_{01}, \dots, x_{0n}) = 0$. Поэтому для того, чтобы доказать, что к уравнению (8) применима теорема 1 из §8, и оно разрешимо относительно u_m , достаточно показать, что частная производная $\frac{\partial \psi}{\partial u_m}$ непре-

рывна и отлична от нуля в точке $\tilde{N}_0$. С этой целью вычислим указанную частную производную. Подставим в первые $m-1$ уравнений системы (1) функции (6), являющиеся решением этих уравнений, и продифференцируем полученные при этом тождества по u_m . Получим систему:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial F_1}{\partial u_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_m} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial u_{m-1}} \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial u_m} + \frac{\partial F_1}{\partial u_m} = 0, \\
 (9) \quad & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_m} + \dots + \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_{m-1}} \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial u_m} + \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_m} = 0.
 \end{aligned}$$

Далее, продифференцируем по u_m равенство (7). Получим:

$$(10) \quad \frac{\partial F_m}{\partial u_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_m} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial u_{m-1}} \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial u_m} + \frac{\partial F_m}{\partial u_m} = \frac{\partial \psi}{\partial u_m}.$$

Умножим теперь равенства (9) и (10) соответственно на алгебраические дополнения $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{m-1}, \Delta_m$ элементов последнего столбца якобиана (5) и затем сложим эти равенства. Получим: $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial \Phi_k}{\partial u_m} [\Delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial u_k} + \Delta_2 \frac{\partial F_2}{\partial u_k} + \dots + \Delta_m \frac{\partial F_m}{\partial u_k}] +$

$$+ (\Delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial u_m} + \Delta_2 \frac{\partial F_2}{\partial u_m} + \dots + \Delta_m \frac{\partial F_m}{\partial u_m}) = \Delta_m \frac{\partial \psi}{\partial u_m}.$$

Так как сумма произведений элементов данного столбца определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов этого (другого) столбца равна определителю (нулю), то каждая квадратная скобка равна нулю, а круглая скобка равна якобиану (5). Таким образом, мы получаем равенство (верное в некоторой окрестности точки M_0):

$$(11) \quad \Delta = \Delta_m \frac{\partial \psi}{\partial u_m}.$$

Здесь символом Δ обозначен якобиан (5), а Δ_m - алгебраическое дополнение к последнему элементу его последнего столбца, которое совпадает с минором, обведенным пунктиром и, по нашему предположению, отлично от нуля в точке M_0 . Из (11), очевидно, следует, что:

$$(12) \quad \frac{\partial \psi}{\partial u_m} = \frac{\Delta}{\Delta_m}.$$

Формула (12), справедливая в некоторой окрестности точки

$\tilde{N}_0$, доказывает непрерывность частной производной $\frac{\partial \psi}{\partial u_m}$ в

точке $\tilde{N}_0$, так как Δ и Δ_m состоят из частных производных

(21)

систему:

(17)

известных $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_m}{\partial x_1}$. Определитель этой системы, то есть

якобиан (5), отличен от нуля в окрестности точки M_0 .

$$(18) \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = - \frac{\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(u_1, \dots, u_{k-1}, x_l, u_{k+1}, \dots, u_m)}}{\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(u_1, u_2, \dots, u_m)}},$$

$$l = 1, \dots, n.$$

Выражения для частных производных второго и последующих порядков можно получить посредством дифференцирования этих формул.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §9.

- 1) Останется ли формулировка теоремы 1 эквивалентной исходной, если заменить в ней набор произвольных положительных чисел $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$ на набор $(\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)$ - одинаковых положительных чисел, то есть просто задать одно положительное число ε ?
- 2) Напишите подробное выражение для определителя, стоящего в числителе формулы (18).
- 3) Почему определитель системы (17) отличен от нуля в окрестности точки M_0 ?

§10.

ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИЙ.

Понятие зависимости и независимости функций, рассматриваемое в этом параграфе, является обобщением известного из линейной алгебры понятия линейной зависимости и независимости элементов линейного пространства.

В курсе линейной алгебры рассматривается понятие линейной зависимости элементов линейного пространства. Например, в линейном пространстве функций n переменных, определённых на области $G, G \subset R^n$, m ($m > 1$) функций называются *линейно зависимыми*, если хотя бы одна из этих функций представляется в виде линейной комбинации (то есть линейной функции) остальных, и это равенство тождественно на области G .

Сейчас мы рассмотрим более общее понятие зависимости функций, чем линейная зависимость. Пусть в некоторой области $G, G \subset R^n$, определены и дифференцируемы m ($m > 1$) функций:

$$(1) \quad \begin{cases} u_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x) \\ \text{-----} \\ u_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n) = \varphi_m(x) \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $u_k = \varphi_k(x)$ из набора (1) называется (*гладко*) *зависящей* от остальных функций этого набора, если для любого $x \in G$ верно равенство: $u_k(x) = \Phi(u_1(x), \dots, u_{k-1}(x), u_{k+1}(x), \dots, u_m(x))$, где $\Phi = \Phi(w_1, \dots, w_{m-1})$, некоторая функция, определённая и дифференцируемая в соответствующей области изменения своих аргументов. Функции набора (1) будем называть (*гладко*) *зависимыми* в области G , если хотя бы одна из них зависит от остальных

в области G . В противном случае функции набора (1) называются *независимыми в области G* .

Рассмотрим простые примеры зависимых и независимых функций.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим функции двух переменных $\varphi_1(x, y) = x + y$, $\varphi_2(x, y) = xy$, $\varphi_3(x, y) = x^2 + y^2$. Функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *зависимы во всём пространстве R^2* , поскольку равенство: $\varphi_3(x, y) = [\varphi_1(x, y)]^2 - 2\varphi_2(x, y)$ верно для всех $(x, y) \in R^2$.

ПРИМЕР 2. Функции $u_1(x, y) = x + y$, $u_2(x, y) = x - y$ являются *независимыми* в любой области Ω , $\Omega \subset R^2$, такой, что $(0; 0) \in \Omega$.

В самом деле, если взять $x = y$, то $u_1(x, x) = 2x$, $u_2(x, x) = x - x \equiv 0$. Следовательно, в этом случае, то есть на пересечении области Ω с прямой $L_1: x = y$, функция u_1 не выражается через u_2 . Аналогично, на пересечении области Ω с прямой $L_2: x = -y$, функция u_2 не выражается через u_1 , так как в этом случае $u_1(x, -x) \equiv 0$, $u_2(x, -x) = 2x$. Если область Ω содержит точку $(0; 0)$, то она заведомо содержит и некоторую окрестность этой точки, а значит, и точки вида $(x; x)$, $(x; -x)$, где $x \neq 0$. Поэтому в такой области ни одну из указанных функций нельзя выразить через другую.

10.1 ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ НЕЗАВИСИМОСТИ ФУНКЦИЙ.

Рассмотрим теперь условия, при которых данный конечный набор функций является независимым.

ТЕОРЕМА 1. Пусть задан набор функций: $u_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n)$, ..., $u_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n)$, где $n \geq m > 1$. Пусть все

функции этого набора определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0(x_{01}, \dots, x_{0n})$. Тогда, если якобиан из этих функций по каким-либо m переменным отличен от нуля в точке M_0 , то функции данного набора независимы в некоторой окрестности точки M_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что в точке M_0 отличен от нуля якобиан

$$(2) \quad \frac{D(u_1, u_2, \dots, u_m)}{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}.$$

Будем рассуждать от противного. Предположим, что функции $u_1, u_2, \dots, u_m$ зависимы в некоторой окрестности точки M_0 , т.е. одна из этих функций, например u_k , всюду этой окрестности выражается в виде $u_k = \Phi(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_m)$, где Φ — некоторая дифференцируемая функция. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, вычислим производную функции u_k по любой из переменных x_l ($l = 1, 2, \dots, m$). Получаем следующие равенства:

$$(3) \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k-1}} \frac{\partial u_{k-1}}{\partial x_l} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k+1}} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_l} + \dots \\ \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \quad (l = 1, 2, \dots, m).$$

Формулы (3), рассматриваемые в точке M_0 , показывают, что k -я строка якобиана (2) представляет собой линейную комбинацию остальных его строк с коэффициентами, соответственно равными $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k-1}}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k+1}}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_m}$ (все производные вычислены в точке M_0). Но в этом случае якобиан (2) равен нулю в точке M_0 , что противоречит условию теоремы. Доказательство закончено.

ПРИМЕР 3. Выше (см. пример 2) рассматривались две функции $u_1 = x + y$ и $u_2 = x - y$, и с помощью определения 1 была показана их независимость в окрестности точки $(0;0)$. Применяя к этим функциям теорему 1, получаем, что они независимы в окрестности любой точки пространства R^2 , поскольку якобиан $\frac{D(u_1, u_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ всюду в R^2 .

10.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ.

Пусть снова задан набор из m функций от n переменных (1). Будем предполагать, что функции (1) определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0(x_{01}, \dots, x_{0n})$, причем все частные производные первого порядка этих функций непрерывны в самой точке M_0 .

Рассмотрим вопрос о том, какие из функций набора (1) являются независимыми. С этой целью составим из частных производных всех функций (1) следующую функциональную матрицу:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

содержащую m строк и n столбцов. Справедливо следующее замечательное утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть в описанных выше условиях функциональная матрица (4) обладает свойствами:

- 1) некоторый минор r -го порядка отличен от нуля в точке $M_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$;

$$(8) \quad \left. \begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r} \frac{\partial \psi_r}{\partial x_l} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_l} = 0, \\ & \dots\dots\dots \\ & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} \frac{\partial \psi_r}{\partial x_l} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_l} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Заметим, что равенства (8) справедливы для всех точек $M(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ из некоторой окрестности точки M_0 .

Для того, чтобы показать, что функция u_{r+1} зависит в некоторой окрестности точки M_0 только от $u_1, \dots, u_r$, подставим значения $x_1, \dots, x_r$, определяемые уравнениями (7), в $(r+1)$ -е равенство системы (1). При этом получим:

$$u_{r+1} = \varphi_{r+1}(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = \varphi_{r+1}[\psi_1(u_1, \dots, u_r, x_{r+1}, \dots, x_n), \dots, \psi_r(u_1, \dots, u_r, x_{r+1}, \dots, x_n), x_{r+1}, \dots, x_n] = \Phi(u_1, \dots, u_r, x_{r+1}, \dots, x_n),$$

то есть фактически u_{r+1} превращается в функцию аргументов $u_1, \dots, u_r, x_{r+1}, \dots, x_n$, которую мы обозначили символом Φ .

Остается доказать, что для всех значений переменных $x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$, лежащих в достаточно малой окрестности точки M_0 , функция Φ на самом деле не зависит от $x_{r+1}, \dots, x_n$. Для этого достаточно доказать, что для всех $x_1, \dots, x_n$ из достаточно малой окрестности точки M_0 справедливы равенства:

$$(9) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} = 0 \quad (l=r+1, \dots, n).$$

Продифференцируем функцию Φ по переменной x_l ($l=r+1, \dots, n$) как сложную функцию. Получим:

$$(10) \quad \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_r} \frac{\partial \psi_r}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}.$$

Рассмотрим теперь следующий минор $(r + 1)$ -го порядка матрицы (4):

$$(11) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_r} & \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_1} \end{vmatrix}.$$

По условию теоремы этот минор равен нулю всюду в окрестности точки M_0 . Умножим равенства (8) и (10) на соответствующие алгебраические дополнения $\Delta_1, \dots, \Delta_r, \Delta_{r+1}$ элементов последнего столбца минора (11) и после этого сложим все эти равенства. В силу теоремы о том, что сумма произведений элементов данного столбца на соответствующие алгебраические дополнения элементов этого (другого) столбца равна определителю (нулю), получим

$$(12) \quad \Delta = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \Delta_{r+1}.$$

В равенстве (12) символ Δ обозначает минор (11), равный нулю всюду в окрестности точки M_0 , а алгебраическое дополнение Δ_{r+1} совпадает с минором (5), отличным от нуля в точке M_0 , а значит (в силу непрерывности всех частных производных, входящих в него) и в некоторой окрестности этой точки. Из равенства (12) поэтому заключаем, что всюду в некоторой окрестности точки M_0 справедливы равенства (9). Теорема доказана.

ПРИМЕР 4. Исследуем зависимость функций:

$$u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad u_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

$$u_3 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

Функциональная матрица (4) имеет в данном случае следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2(x_2 + x_3 + x_4) & 2(x_1 + x_3 + x_4) & 2(x_1 + x_2 + x_4) & 2(x_1 + x_2 + x_3) \end{vmatrix}.$$

Легко убедиться в том, что все определители третьего порядка тождественно равны нулю. При этом в любой точке пространства (x_1, x_2, x_3, x_4) , у которой не все четыре координаты x_1, x_2, x_3, x_4 совпадают, хотя бы один из определителей второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

- отличен от нуля. Значит, в окрестности любой из указанных точек u_1 и u_2 независимы, а u_3 зависит от u_1 и u_2 .

В частности, мы ещё раз подтвердили зависимость функции $\varphi_3(x, y) = x^2 + y^2$ от функций $\varphi_1(x, y) = x + y$, $\varphi_2(x, y) = xy$ в Примере 1.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §10.

- 1) В какой области пространства R^3 переменных x, y, z являются независимыми функции e^{xy} , e^{yz} , e^{xz} ?
- 2) Даны функции: $u_1 = x + y + z$; $u_2 = x - y$; $u_3 = x + 3y + 2z$.
Что можно сказать о зависимости или независимости этого набора? Укажите все возможные подмножества независимых функций из данного набора.
- 3) Верно ли, что (гладкая) зависимость набора дифференцируемых функций вида (1) при $m=n$ в некоторой окрестности точки $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ эквивалентна линейной зависимости их дифференциалов в данной точке

x_0 ? Если да – докажите. Если нет – приведите соответствующие примеры.

УСЛОВНЫЙ ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Данный параграф посвящён понятию условного локального экстремума функции многих переменных, более общему, чем понятие локального экстремума, изложенное в предыдущем параграфе.

Итак, теперь наша цель – рассмотреть более общее понятие *условного* локального экстремума и способы его отыскания. В точке локального экстремума – например, локального максимума – функция принимает значение, которое больше (а в случае локального минимума – меньше) значений этой функции во всех точках некоторой окрестности. Однако довольно часто в практических задачах требуется отыскать точку, в которой данная функция принимает значение, большее (или меньшее) её значений не во всей окрестности этой точки, а лишь в некоторой её части, точки которой удовлетворяют специальным условиям (так называемым условиям связи). Эти условия связи обычно задают набором уравнений.

ПРИМЕР 1. Пусть требуется найти экстремум функции $z = x^2 - y^2$ на прямой $L: y = 2x$. Таким образом, переменные x и y связаны между собой уравнением: $F(x, y) = y - 2x = 0$. Эта задача легко решается. Достаточно подставить равенство: $y = 2x$ в выражение для функции, и мы получим: $z = x^2 - 4x^2 = -3x^2$. Так как полученная функция всюду отрицательна, кроме точки 0, где она равна 0, то очевидно, что $x_0 = 0$ – точка её максимума (даже не локального, а глобального). Однако исходная функция $z = x^2 - y^2$ в точке $(0; 0)$ не имеет локального экстремума, в чём не трудно убедиться.

На Рис. 5 ниже показан ещё один наглядный пример условного локального экстремума. Поверхность S задана уравнением $S: z = f(x, y) = x^2 + y^2$ (эллиптический параболоид). Функция $f(x, y)$ не имеет локального экстремума в точке A . Однако, если рассматривать пересечение поверхности S с плоскостью Q , представляющее собой параболу, то есть рассматривать функцию $f(x, y)$ при условии, что переменные x, y связаны уравнением плоскости Q , то с этой точки зрения точка A является локальным минимумом. Таким образом, это условный локальный минимум.

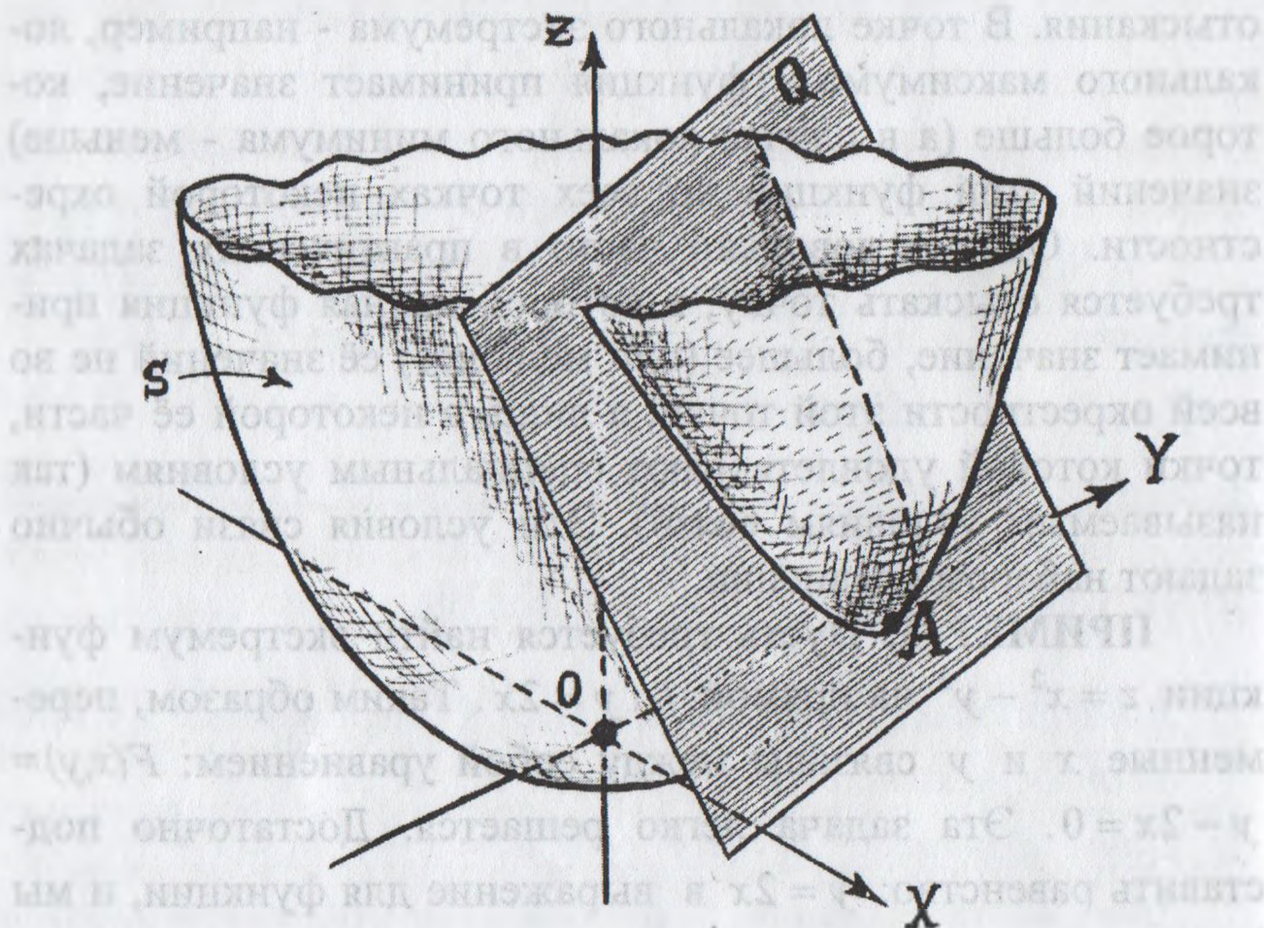


РИС.5

Сформулируем теперь общее понятие условного локального экстремума. Пусть в некоторой области $G \subseteq R^{n+m}$ задана функция $n + m$ переменных $u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ и система уравнений:

$$(1) \quad \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \text{-----} \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Условным локальным экстремумом функции f при условиях связи (1) называется точка $M_0(x_{01}, \dots, x_{0n}, y_{01}, \dots, y_{0m})$ такая, что её координаты удовлетворяют условиям связи (1), и существует окрестность точки M_0 , в пределах которой значение функции $f(M_0)$ является наибольшим (наименьшим) среди её значений во всех точках этой окрестности, которые удовлетворяют условиям связи (1).

Рассмотрим теперь задачу об отыскании условного локального экстремума функции $u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ при условиях связи (1).

11.1. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА.

Выясним, каковы необходимые условия существования условного локального экстремума в рассматриваемой точке M_0 .

Для решения этого вопроса будем предполагать, что все функции в левых частях системы (1) дифференцируемы в некоторой окрестности рассматриваемой точки M_0 . Их частные производные по переменным $(y_1, \dots, y_m)$ непрерывны в самой точке M_0 , и якобиан $\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \neq 0$ в точке

M_0 . Таким образом, выполнены все условия теоремы 1 из §9 о существовании системы неявных функций, и следовательно, для любых положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ найдётся окрестность точки $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$, в которой единст-

венным образом определён набор из m дифференцируемых неявных функций:

$$(2) \quad \begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \text{-----} \\ y_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases},$$

определяемых системой функциональных уравнений (1) и удовлетворяющих неравенствам: $|y_1 - u_{01}| < \varepsilon_1, |y_2 - u_{02}| < \varepsilon_2, \dots, |y_m - u_{0m}| < \varepsilon_m$. Подставив равенства (2) в функцию $u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, мы сведём нашу задачу к задаче об отыскании обычного локального экстремума функции

$$(3) \quad u = f(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) \equiv \Phi(x_1, \dots, x_n)$$

в точке $N_0(x_{01}, \dots, x_{0n})$. Необходимые условия для этого нам известны (см. теорему 1 из §7). А именно, если в точке $N_0(x_{01}, \dots, x_{0n})$ имеется локальный экстремум дифференцируемой функции $\Phi(x_1, \dots, x_n)$, то её дифференциал в этой точке равен нулю при любых достаточно малых приращениях переменных, то есть имеет место равенство: $d\Phi = \Phi'_{x_1} dx_1 + \dots + \Phi'_{x_n} dx_n = 0$ (все частные производные вычислены в точке N_0). Далее, в силу тождества (3) и инвариантности формы записи первого дифференциала, имеем равенство:

$$(4) \quad d\Phi = df = f'_{x_1} dx_1 + \dots + f'_{x_n} dx_n + f'_{y_1} dy_1 + \dots + f'_{y_m} dy_m = 0.$$

В равенстве (4) дифференциалы $dy_i = d\varphi_i$ ($i = 1, \dots, m$) — это дифференциалы найденных неявных функций. Они могут быть выражены через дифференциалы $dx_1, \dots, dx_n$ в виде их линейных комбинаций следующим образом. При подстановке неявных функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ в систему уравнений связи (1) в некоторой окрестности точки $N_0(x_{01}, \dots, x_{0n})$ возникает система тождеств:

$$(5) \quad \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) \equiv 0 \\ \text{-----} \\ F_m(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) \equiv 0 \end{cases}$$

Дифференцируя тождества (5), получаем линейную систему:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m} dy_m = 0 \\ \text{-----} \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_m}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} dy_m = 0 \end{cases}$$

(Напомним ещё раз, что все частные производные вычислены в точке $N_0(x_{01}, \dots, x_{0n})$). В силу наложенного ранее условия: $\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \neq 0$, - система (6) имеет единст-

венное решение относительно дифференциалов $dy_1 = d\varphi_1$, ..., $dy_m = d\varphi_m$, выражающееся по формулам Крамера. То есть каждый из дифференциалов $dy_1, \dots, dy_m$ представляется в виде некоторой линейной комбинации дифференциалов $dx_1, \dots, dx_n$. Подставляя эти линейные комбинации в равенство (4) и приводя подобные члены, получим уравнение вида: $A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n = 0$. (Можно отметить, что полученные константы $A_1, \dots, A_n$ - это просто частные производные в точке N_0 вышеупомянутой функции $\Phi(x_1, \dots, x_n)$). Отсюда получаем, что необходимыми условиями локального условного экстремума при описанных условиях является равенство нулю указанных констант, то есть равенства:

$$(7) \quad A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0.$$

Резюмируем теперь наши рассуждения.

ВЫВОД (Необходимые условия условного локального экстремума). Если система (1) уравнений связи удовлетво-

ряет (по отношению к переменным $y_1, \dots, y_m$) в окрестности точки $M_0(x_{01}, \dots, x_{0n}, y_{01}, \dots, y_{0m})$ условиям теоремы о существовании системы дифференцируемых неявных функций (теорема 1 из §9), то необходимыми условиями для существования условного локального экстремума у функции $u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ в точке M_0 являются равенства (7), получаемые из уравнения (4) и системы (6). Поэтому в описанных условиях для отыскания $n + m$ координат точки возможного условного экстремума следует решить следующую систему из $n + m$ уравнений:

$$\begin{cases} A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0 \\ F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \text{-----} \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}.$$

11.2. МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЁННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА.

Рассмотрим теперь метод, предложенный Лагранжем для отыскания локального условного экстремума. Этот метод, как мы увидим ниже, позволяет вывести и необходимые, и достаточные условия для существования условного локального экстремума рассматриваемой функции в данной точке M_0 . В предыдущих рассмотрениях задачи о существовании условного экстремума мы опирались на то, что переменные $y_1, \dots, y_m$ являются неявными функциями от $x_1, \dots, x_n$, задаваемыми уравнениями связи (1). В методе Лагранжа отсутствует (в явном виде) представление переменных $y_1, \dots, y_m$ как функций от $x_1, \dots, x_n$, то есть происходит симметризация переменных, они становятся равноправными.

Пусть по-прежнему задана функция $n+m$ переменных $u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ и система уравнений (или условий) связи (1). Требуется найти необходимые и достаточные условия для существования в данной точке $M_0(x_{01}, \dots, x_{0n}, y_{01}, \dots, y_{0m})$ условного локального экстремума функции $u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ при условиях связи (1).

Для решения этой задачи предлагается рассмотреть специальную функцию, которая носит имя Лагранжа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функцией Лагранжа рассматриваемой задачи называется функция (от $n+m$ переменных $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$):

$$(8) \quad L(x, y) = f(x, y) + \lambda_1 F_1(x, y) + \dots + \lambda_m F_m(x, y),$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, $\lambda_j \in R$, $j = 1, \dots, m$.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА ПО МЕТОДУ ЛАГРАНЖА.

Будем предполагать, как и выше, функции $f(x, y)$, $F_1(x, y), \dots, F_m(x, y)$ дифференцируемыми в окрестности точки $M_0(x_{01}, \dots, x_{0n}, y_{01}, \dots, y_{0m})$. В этих условиях функция Лагранжа (8) также дифференцируема. Будем (как и выше) предполагать также, что частные производные функций $F_1(x, y), \dots, F_m(x, y)$ по переменным $(y_1, \dots, y_m)$ непрерывны в самой точке M_0 , и якобиан $\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \neq 0$ в точке M_0 .

Пусть известно, что в точке M_0 у функции $f(x, y)$ имеется условный экстремум при условиях связи (1). Выясним, каким обязательным условиям должны удовлетворять в этом случае её координаты.

В силу сделанных выше предположений, мы по-прежнему располагаем равенствами (4) и (6). Умножим каждое из равенств (6) на произвольные (пока неопределённые) постоянные множители $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Полученные после этого ум-

ножения равенства сложим почленно с равенством (4). В результате получается равенство:

$$(9) \quad \sum_{i=1}^n (f'_{x_i} + \sum_{k=1}^m \lambda_k (F_k)'_{x_i}) dx_i + \sum_{j=1}^m (f'_{y_j} + \sum_{k=1}^m \lambda_k (F_k)'_{y_j}) dy_j = \\ = L'_{x_1} dx_1 + \dots + L'_{x_n} dx_n + L'_{y_1} dy_1 + \dots + L'_{y_m} dy_m = dL = 0.$$

Подберём набор констант (неопределённых множителей) $\lambda_0 = (\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0m})$ так, чтобы все коэффициенты при dy_j в (9) равнялись нулю ($j = 1, \dots, m$). Это означает, что $\lambda_0 = (\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0m})$ должно быть решением системы:

$$(10) \quad \begin{cases} L'_{y_1} = f'_{y_1} + \sum_{k=1}^m \lambda_k (F_k)'_{y_1} = 0 \\ \hline L'_{y_m} = f'_{y_m} + \sum_{k=1}^m \lambda_k (F_k)'_{y_m} = 0 \end{cases}$$

В силу наложенного выше условия, что $\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \neq 0$ в точке M_0 , такой набор констант $\lambda_0 = (\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0m})$ определяется из системы (10) единственным образом по формулам Крамера. Равенство же (9), при подстановке в него набора $\lambda_0 = (\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0m})$, приобретает вид:

$$(11) \quad dL = \sum_{i=1}^n (f'_{x_i} + \sum_{k=1}^m \lambda_{0k} (F_k)'_{x_i}) dx_i = 0,$$

Отсюда, в силу независимости переменных $x_1, \dots, x_n$, следуют равенства:

$$(12) \quad f'_{x_i} + \sum_{k=1}^m \lambda_{0k} \cdot (F_k)'_{x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Объединяя систему (10) с системой (12), и присоединяя к ним систему уравнений связи (1), получим следующую итоговую систему из $n + 2m$ уравнений, которым

при данных условиях обязаны удовлетворять координаты точки условного экстремума:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} f'_{x_1} + \sum_{k=1}^m \lambda_k (F_k)'_{x_1} = 0 \\ \text{-----} \\ f'_{x_n} + \sum_{k=1}^m \lambda_k (F_k)'_{x_n} = 0 \\ f'_{y_1} + \sum_{k=1}^m \lambda_k (F_k)'_{y_1} = 0 \\ \text{-----} \\ f'_{y_m} + \sum_{k=1}^m \lambda_k (F_k)'_{y_m} = 0 \\ F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \text{-----} \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{array} \right.$$

Таким образом, каждой точке $M_0(x_{01}, \dots, x_{0n}, y_{01}, \dots, y_{0m})$ условного экстремума при предположениях, перечисленных выше, соответствует единственное решение $(x_{01}, \dots, x_{0n}, y_{01}, \dots, y_{0m}, \lambda_{01}, \dots, \lambda_{0m})$ системы (13). Поэтому для поиска точек возможного условного экстремума следует решить систему (13) и исключить из полученных решений параметры $\lambda_0 = (\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0m})$. Тогда оставшиеся координаты $(x_0, y_0) = (x_{01}, \dots, x_{0n}, y_{01}, \dots, y_{0m})$ и есть координаты возможного условного экстремума.

ВЫВОД. Система (13) представляет собой совокупность необходимых условий (по методу Лагранжа) существования условного локального экстремума.

(Можно отметить, что система (13) получается как равенство нулю всех частных производных функции Лагранжа, если формально рассматривать эту функцию как функцию $n + 2m$ независимых переменных. В этом и состоит идея симметризации переменных в методе Лагранжа).

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА ПО МЕТОДУ ЛАГРАНЖА.

Рассмотрим теперь вопрос о достаточных условиях для существования условного локального экстремума. Пусть в точке $M_0(x_{01}, \dots, x_{0n}, y_{01}, \dots, y_{0m})$ выполнены необходимые условия существования условного экстремума (то есть её координаты удовлетворяют системе (13)). Пусть также функции $u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ и $F_j(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, ($j = 1, \dots, m$), дважды дифференцируемы в некоторой окрестности точки M_0 , и их частные производные второго порядка непрерывны в самой точке M_0 .

Заметим, что в силу условий связи (1), приращения $\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ и $\Delta L = L(x, y, \lambda_0) - L(x_0, y_0, \lambda_0)$ функций f и L совпадают, где λ_0 есть решение системы (10). Поэтому наличие условного локального экстремума при условиях связи (1) в точке M_0 у функции $f(x, y)$ равносильно наличию (при тех же условиях связи) локального экстремума в точке M_0 у функции $L(x, y, \lambda_0)$. Функция $L(x, y, \lambda_0)$ является сложной, так как условия связи (1) задают неявную зависимость переменных $y = (y_1, \dots, y_m)$ от переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$. Однако, в силу системы (10), все её первые частные производные по переменным $y_1, \dots, y_m$ равны нулю при $\lambda = \lambda_0$, поэтому второй дифференциал функции $L(x, y, \lambda_0)$ в точке M_0 имеет такой же вид квадратичной формы, как второй дифференциал функции *независимых* переменных. А именно:

$$(14) \quad d^2L = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial y_m} dy_m \right)^2 L.$$

Теперь ещё раз напомним, что мы ищем условный экстремум, поэтому на множестве, где осуществляется этот

поиск, тождественно выполняются уравнения (1). Поэтому мы можем продифференцировать их и получить систему, аналогичную системе (6) в начале параграфа. Следует однако отметить, что здесь, в методе Лагранжа, мы не пользуемся представлением $y_1, \dots, y_m$ как неявных функций от $x_1, \dots, x_n$, и вместо тождества (5) пользуемся непосредственно тождеством (1). Итак, получаем систему:

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m} dy_m = 0 \\ \hline \frac{\partial F_m}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_m}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} dy_m = 0 \end{cases}$$

В силу ранее наложенного условия, что в точке M_0 якобиан

$$\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \neq 0, \text{ из системы (15) дифференциалы } dy_1, \dots, dy_m$$

однозначно, по формулам Крамера, выражаются через дифференциалы независимых переменных $dx_1, \dots, dx_n$ в виде их линейных комбинаций. Подставляя эти выражения в (14), получим квадратичную форму:

$$(16) \quad d^2 L = K(dx_1, \dots, dx_n),$$

зависящую уже только от дифференциалов $dx_1, \dots, dx_n$. Отсюда следует, что если квадратичная форма (16) является положительно (отрицательно) определённой, то в рассматриваемой точке M_0 имеется условный локальный минимум (максимум). Если же форма $d^2 L = K(dx_1, \dots, dx_n)$ знакопеременна, то условного экстремума в точке M_0 нет.

Подытожим теперь наши рассуждения.

ВЫВОД (Достаточные условия существования условного локального экстремума). Пусть координаты точки $M_0(x_{01}, \dots, x_{0n}, y_{01}, \dots, y_{0m})$ удовлетворяют системе (13), и

кроме того, функция $u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ и все функции $F_j(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, ($j = 1, \dots, m$), дважды дифференцируемы в некоторой окрестности точки M_0 , и их частные производные второго порядка непрерывны в самой точке M_0 . Тогда достаточным условием для существования условного экстремума функции $u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ в этой точке при условиях связи (1) является знакоопределённость квадратичной формы (16) второго дифференциала $d^2 f$ в точке M_0 . Если же квадратичная форма (16) знакопеременна, то условного локального экстремума в точке M_0 нет.

Добавим, что в случае квази-знакоопределённости квадратичной формы $d^2 L = K(dx_1, \dots, dx_n)$ ответ неясен.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим функцию трёх переменных $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Требуется найти её условный локальный экстремум при наличии условия связи: $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0$. Используем метод Лагранжа. Функция Лагранжа в данном случае имеет вид: $L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + 1)$. Соответствующая система (13) следующая:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + \lambda = 0 \\ 2x_2 + \lambda = 0 \\ 2x_3 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0 \end{array} \right.$$

Отсюда находим: $x_{01} = x_{02} = x_{03} = -\frac{1}{3}$; $\lambda_0 = \frac{2}{3}$. Таким обра-

зом, $M_0(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3};)$ - точка возможного экстремума при

$\lambda_0 = \frac{2}{3}$. Дифференцирование условия связи даёт

$dF = dx_1 + dx_2 + dx_3 = 0$. Второй дифференциал функции Лагранжа, имеет следующий вид:
 $d^2L(M_0) = 2[(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2]$. Полученная квадратичная форма, очевидно, положительно определена, следовательно, в точке $M_0(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$ имеется условный локальный минимум заданной функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ К §11.

- 1) Подробно напишите второй дифференциал сложной функции $L(x, y, \lambda_0)$ в точке M_0 и объясните, почему он имеет вид (16).
 - 2) Найдите координаты всех точек возможных условных локальных экстремумов функции $u = x - 2y + 2z$ при условии: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, не пользуясь методом Лагранжа.
 - 3) Пользуясь методом Лагранжа, найдите условные локальные экстремумы функции $u = x - 2y + 2z$ при условии: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
-